




UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT
9000000705

UNIVERSITÉ DE GAND.

DISSERTATION INAUGURALE

SUR

LA THÉORIE DE LA FONCTION GAMMA.

SOUTENUE DEVANT LA FACULTÉ DES SCIENCES,

EN SA SÉANCE SOLENNELLE DU 29 JANVIER 1859, A 10 HEURES DU MATIN,

EN PRÉSENCE DU RECTEUR M. ROULEZ,

PROFESSEUR ORDINAIRE A LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE ET LETTRES,

ET SOUS LA PRÉSIDENCE DE M. DUGNIOLLE,

DOYEN ET PROFESSEUR ORDINAIRE A LA FACULTÉ DES SCIENCES,

POUR OBTENIR LE DIPLOME SPÉCIAL EN SCIENCES PHYSICO-MATHÉMATIQUES,

PAR

M. Henri Limbourg,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'UNIVERSITÉ DE GAND.

La présente dissertation inaugurale, ainsi que les thèses y annexées, peuvent être livrées à l'impression.

Gand, le 25 Juin 1858.

Le doyen de la faculté des sciences,
A. TIMMERMANS.

Le Secrétaire,
H. VALERIUS.

Conformément à l'article 4 du réglement pour l'exécution de l'arrêté royal du 16 Septembre 1853, les opinions de l'auteur, émises dans sa Dissertation inaugurale, ne peuvent être considérées, par le fait de l'admission de son travail, comme étant celles de la faculté ou de l'université.

THÉORIE

DE LA

FONCTION GAMMA,

PAR

HENRI LIMBOURG,

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES.



GAND,
IMP. ET LITH. DE C. ANNOOT-BRAECKMAN.

—

1859.



AVANT-PROPOS.

Parmi les transcendantes nouvelles que les progrès et les besoins de l'analyse moderne ont successivement introduites dans la science, il n'en est peut-être pas de plus remarquable que la fonction ordinairement désignée sous le nom d'Intégrale Eulérienne de 2me espèce, ou de fonction Gamma. Les belles propriétés dont elle jouit, sa liaison intime avec l'une des séries les plus utiles que l'on connaisse, la série de Stirling, les nombreuses applications dont elle est susceptible dans différentes questions d'analyse, ont tour à tour fixé l'attention des Géomètres, et ont été l'objet de leurs travaux. Mais la multiplicité même de ces travaux en rend l'étude longue et parfois assez pénible, et il est peut-être utile de présenter dans un exposé rigoureux, les principes fondamentaux de la théorie et les résultats les plus intéressants des recherches faites sur ce sujet. Tel est le but que je me suis proposé. Je laisse à mes juges le soin de décider si la tâche que j'ai entreprise, n'était pas au-dessus de mes forces, et jusqu'à quel point je puis y avoir réussi.

THÉORIE DE LA FONCTION Γ.

CHAPITRE Ier.

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION Γ.

1. *Définition.* — Quand dans une intégrale définie relative à une certaine variable, la fonction sous le signe d'intégration contient une quantité dont la valeur constante pendant l'intégration, reste néanmoins arbitraire, on peut considérer l'intégrale définie comme une fonction de cette quantité. Ainsi, a étant supposé réel et positif, l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx$, est une fonction de a, que nous désignerons par la lettre Γ, et nous poserons :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx.$$

2. $\Gamma(a)$ *est une fonction finie et déterminée.* — Nous allons faire voir que pour toute valeur finie de a, plus grande que 0, $\Gamma(a)$ est fini et déterminé.

Pour cela décomposons l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx$, en trois parties comme suit :

$$\Gamma(a) = \int_0^\varepsilon e^{-x} x^{a-1}\, dx + \int_\varepsilon^n e^{-x} x^{a-1}\, dx + \int_n^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx,$$

ε étant une quantité finie différente de 0, mais qui pourra s'en rapprocher autant que l'on voudra, n étant un nombre plus grand que $a+1$, et satisfaisant à l'inégalité

$$e^n > n^{a+1}$$

ce nombre n pouvant d'ailleurs croître autant que l'on voudra.

Les deux facteurs e^{-x} et x^{a-1} étant toujours positifs, entre les limites de l'intégration, on aura, si $a > 0$, x_1 étant compris entre 0 et ε

$$\int_0^\varepsilon e^{-x} x^{a-1}\,dx = e^{-x_1} \int_0^\varepsilon x^{a-1}\,dx = e^{-x_1} \frac{\varepsilon^a}{a},$$

et par suite

$$0 < \int_0^\varepsilon e^{-x} x^{a-1}\,dx < \frac{\varepsilon^a}{a}.$$

On voit que je puis prendre ε assez petit pour que l'intégrale $\int_0^\varepsilon e^{-x} x^{a-1}\,dx$, soit inférieure à toute limite donnée.

La seconde intégrale $\int_\varepsilon^n e^{-x} x^{a-1}\,dx$, les limites étant finies, et la différentielle ne devenant jamais infinie entre les limites, est finie et déterminée.

Reste la 3me; or, si les deux conditions que nous avons posées pour n sont satisfaites, on aura constamment pour $x =$ ou $> n$, $e^x > x^{a+1}$ (*), ou $e^{-x} < \frac{1}{x^{a+1}}$, par conséquent :

$$\int_n^\infty e^{-x} x^{a-1}\,dx < \int_n^\infty \frac{x^{a-1}}{x^{a+1}}\,dx \quad \text{ou} \quad \int_n^\infty \frac{dx}{x^2}.$$

(*) Soit $y = x - (a+1)\log x$, d'où $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{a+1}{x}$; si $x > a+1$, $\frac{dy}{dx}$ est constamment positif, et par conséquent y va toujours en croissant, donc n étant supposé plus grand que $a+1$, et tel que $n-(a+1)\log n > 0$, ou $e^n > n^{a+1}$, on aura constamment x étant égal à n ou plus grand que n, $x-(a+1)\log x > 0$, et par suite $e^x > x^{a+1}$.

On aura donc :

$$0 < \int_n^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx < \frac{1}{n}\cdot$$

Je puis donc prendre n assez grand pour que l'intégrale $\int_n^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx$, devienne inférieure à toute limite donnée. Ainsi, nous aurons :

$$\int_\varepsilon^n e^{-x} x^{a-1}\, dx < \Gamma(a) < \int_\varepsilon^n e^{-x} x^{a-1}\, dx + \frac{\varepsilon^a}{a} + \frac{1}{n}\cdot$$

La somme $\frac{\varepsilon^a}{a} + \frac{1}{n}$ pouvant devenir aussi petite qu'on le voudra, en prenant ε et $\frac{1}{n}$ suffisamment petits, il en résulte que l'on peut toujours fixer deux limites finies et déterminées, aussi rapprochées qu'on le voudra, entre lesquelles se trouve compris $\Gamma(a)$. $\Gamma(a)$ est donc fini et déterminé, pour toute valeur finie de a plus grande que 0.

Il est évident de plus que cette fonction est toujours positive, puisque la différentielle $e^{-x} x^{a-1}$ l'est toujours, et de plus, comme cette différentielle n'est jamais nulle x étant compris entre ε et n, il en résulte que la fonction $\Gamma(a)$ elle-même n'est jamais égale à zéro.

3. *L'intégrale définie* $\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx$, *devient infinie, si* $a = 0$, *ou si* a *est négatif.*

En posant $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx$, nous avons mis pour condition que a devait être fini et plus grand que 0, il est en effet très facile de prouver que cette intégrale devient infinie pour $a = 0$, et pour $a < 0$.

En effet, pour $a = 0$, nous aurons :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_0^\varepsilon \frac{e^{-x}}{x} dx + \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx,$$

ou en représentant par x_1, une quantité comprise entre 0 et ε, et x_2 une quantité comprise entre ε et ∞

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx = e^{-x_1} \int_0^\varepsilon \frac{dx}{x} + \frac{1}{x_2} \int_\varepsilon^\infty e^{-x} dx = e^{-x_1} \log \frac{\varepsilon}{0} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x_2}\cdot$$

Or, ε étant une quantité finie, $\frac{e^{-\varepsilon}}{x_2}$ est fini, tandis que $e^{-x_1}\log\frac{\varepsilon}{0} = \infty$, on a donc

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \infty\,.$$

Si a est négatif, en faisant $a = -a'$, nous aurons :

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{a'+1}}dx = \int_0^\varepsilon \frac{e^{-x}}{x^{a'+1}}dx + \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-x}}{x^{a'+1}}\,dx$$

$$= e^{-x_1}\int_0^\varepsilon \frac{dx}{x^{a'+1}} + \frac{1}{x_2{}^{a'+1}}\int_\varepsilon^\infty e^{-x}\,dx.$$

x_1 et x_2 étant compris dans les mêmes limites que dans le cas précédent.

Sous cette forme, il est facile de reconnaître que la 2[e] des intégrales est finie et déterminée, tandis que la 1[re] est infinie. On a donc :

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx = \infty\,,\quad a < 0.$$

On conçoit donc que la définition de $\Gamma(a)$ que nous avons donnée, ne s'applique qu'à des valeurs de a positives, et il faudra se placer à un autre point de vue, lorsqu'on voudra déterminer $\Gamma(a)$ pour des valeurs négatives de a.

4. $\Gamma(a)$ *est une fonction continue.* — Nous avons vu que si

$$n > a + 1,\quad \text{et}\quad e^n > n^{a+1},$$

l'on a

$$\int_\varepsilon^n e^{-x}x^{a-1}\,dx < \Gamma(a) < \int_\varepsilon^n e^{-x}x^{a-1}\,dx + \frac{\varepsilon^a}{a} + \frac{1}{n}\cdot$$

Supposons que, h' désignant une quantité positive déterminée, on ait astreint n aux conditions

$$n > a + h' + 1\,,\quad \text{et}\quad e^n > n^{a+h'+1},$$

on aura évidemment pour toute valeur de h comprise entre 0 et h',

$$\int_\varepsilon^n e^{-x}x^{a+h-1}\,dx < \Gamma(a+h) < \int_\varepsilon^n e^{-x}x^{a+h-1}\,dx + \frac{\varepsilon^{a+h}}{a+h} + \frac{1}{n}\cdot$$

Si nous représentons par μ, μ', ν', ν des coefficients variables, mais toujours compris entre 0 et l'unité, on aura :

$$\Gamma(a) = \int_{\varepsilon}^{n} e^{-x} x^{a-1} \, dx + \frac{\mu \varepsilon^{a}}{a} + \frac{\nu}{n},$$

$$\Gamma(a+h) = \int_{\varepsilon}^{n} e^{-x} x^{a+h-1} \, dx + \frac{\mu' \varepsilon^{a+h}}{a+h} + \frac{\nu'}{n}.$$

Or, si nous désignons par x_1 une quantité comprise entre ε et n, on a :

$$\int_{\varepsilon}^{n} e^{-x} x^{a+h-1} \, dx = x_1^{\,h} \int_{\varepsilon}^{n} e^{-x} x^{a-1} \, dx,$$

d'où

$$\Gamma(a+h) = x_1^{\,h} \int_{\varepsilon}^{n} e^{-x} x^{a-1} \, dx + \frac{\mu' \varepsilon^{a+h}}{a+h} + \frac{\nu'}{n},$$

et par suite :

$$\Gamma(a+h) - \Gamma(a) = (x_1^{\,h} - 1) \int_{\varepsilon}^{n} e^{-x} x^{a-1} \, dx + \frac{\mu' \varepsilon^{a+h}}{a+h} - \frac{\mu \varepsilon^{a}}{a} + \frac{\nu' - \nu}{n}.$$

Or, si dans cette relation, nous faisons tendre h vers zéro, x_1, μ' et ν' varieront, mais en restant néanmoins dans les limites que nous leur avons assignées; $(x_1^{\,h} - 1)$ convergera donc vers zéro pour des valeurs suffisamment petites de h, et par conséquent il en sera de même de $(x_1^{\,h} - 1) \int_{\varepsilon}^{n} e^{-x} x^{a-1} \, dx$; quant aux autres termes, on sait qu'ils deviennent séparément aussi petits qu'on le voudra en prenant des valeurs suffisamment petites de ε et $\frac{1}{n}$. Il est donc démontré que la différence $\Gamma(a+h) - \Gamma(a)$ peut devenir inférieure à toute limite donnée, en prenant h suffisamment petit, et par conséquent, $\Gamma(a)$ est une fonction continue.

5. *Autre forme de la fonction* Γ. — On peut transformer l'intégrale définie $\int_{0}^{\infty} e^{-x} x^{a-1} \, dx$, en une autre, en posant $e^{-x} = y$,

d'où $e^{-x}\,dx = -\,dy$, $x = \log\frac{1}{y}$, et les limites 0 et ∞ pour x correspondant à 1 et 0 pour y, on aura immédiatement :

$$\int_0^\infty e^{-x}\,x^{a-1}\,dx = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{y}\right)^{-1} dy.$$

Et par conséquent, on peut poser indifféremment :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{a-1}\,dx = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{y}\right)^{a-1} dy.$$

6. *Valeurs particulières de* $\Gamma(1)$ *et de* $\Gamma(2)$. — Les valeurs de $\Gamma(a)$ pour $a = 1$ et $a = 2$, s'obtiennent facilement, car si l'on remplace a par ces deux valeurs dans la relation précédente,

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{y}\right)^{a-1} dy,$$

il vient

$$\Gamma(1) = \int_0^1 dy = 1,$$

$$\Gamma(2) = -\int_0^1 \log y\,dy = 1.$$

L'on a donc

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$$

7. $\Gamma(a)$ *a un seul minimum compris entre* $a = 1$ *et* $a = 2$. — L'égalité des valeurs de $\Gamma(1)$ et de $\Gamma(2)$ va nous conduire à une conséquence fort importante relativement à la marche de la fonction Γ.

Remarquons d'abord que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x}\,x^{a-1}\,l(x)dx$, est finie et déterminée pour toute valeur finie de a, plus grande que 0.

En effet, n étant soumis aux conditions

$$n > a + 1, \quad \text{et} \quad e^n > n^{a+1},$$

et ε étant compris entre 0 et 1, nous aurons :

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, l(x)dx = \int_0^\varepsilon e^{-x} x^{a-1}\, l(x)dx + \int_\varepsilon^n e^{-x} x^{a-1}\, l(x)dx + \int_n^\infty e^{-x} x^{a-1}\, l(x)dx.$$

En se souvenant que

$$\int x^{m-1}\, l(x)dx = \frac{mx^m\, l(x) - x^m}{m^2} + \mathrm{C},$$

on aura

$$\int_0^\varepsilon e^{-x} x^{a-1}\, l(x)dx = e^{-x_1} \int_0^\varepsilon x^{a-1}\, l(x)dx = e^{-x_1}\, \frac{a\varepsilon^a l(\varepsilon) - \varepsilon^a}{a^2},\quad 0 < x_1 < \varepsilon.$$

et

$$\int_n^\infty e^{-x}\, x^{a-1}\, l(x)dx < \int_n^\infty \frac{l(x)dx}{x^2},$$

d'où

$$\int_n^\infty e^{-x}\, x^{a-1}\, l(x)dx < \frac{1}{n}\, l(n) - \frac{1}{n}.$$

Et par suite μ et ν représentant des coefficients compris entre 0 et 1, nous aurons :

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, l(x)dx = \int_\varepsilon^n e^{-x} x^{a-1}\, l(x)dx + \frac{\mu a\varepsilon^a[l(\varepsilon) - 1]}{a^2} + \frac{\nu[l(n) - 1]}{n}.$$

Et il est visible que l'intégrale $\int_\varepsilon^n e^{-x}\, x^{a-1}\, l(x)dx$ étant finie et déterminée, et les autres termes du second membre pouvant décroître indéfiniment en faisant ε et $\frac{1}{n}$ suffisamment petits, l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x}\, x^{a-1}\, l(x)dx$ est elle-même finie et déterminée pour toute valeur finie de a plus grande que zéro. Or, cette intégrale représente la dérivée de $\int_0^\infty e^{-x}\, x^{a-1}\, dx$ par rapport à a, on aura donc :

$$\frac{d\Gamma(a)}{da} \quad \text{ou} \quad \Gamma'(a) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{a-1}\, l(x)dx.$$

2

On en déduit facilement

$$\Gamma'(a) = \int_1^{\infty} e^{-x} x^{a-1} l(x) dx - \int_0^1 e^{-x} x^{a-1} l\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Sous cette forme, on remarquera que $\Gamma'(a)$ se compose de la diff-érence de deux intégrales qui sont essentiellement positives par elles-mêmes, et que de plus, tout accroissement donné à a, a pour effet d'augmenter la première et de diminuer la seconde, en effet on a constamment

$$x^{a+h-1} > x^{a-1}, \quad \text{si } x > 1,$$

et

$$x^{a+h-1} < x^{a-1}, \quad \text{si } 0 < x < 1.$$

On en conclut :

1° Que $\Gamma'(a)$ va toujours en croissant;

2° Que s'il existe une valeur de a qui donne $\Gamma'(a) = 0$, cette valeur est unique et correspond au minimum de $\Gamma(a)$;

3° Qu'en deçà de ce minimum, $\Gamma'(a)$ est constamment négative, qu'au delà elle est constamment positive.

Or, nous avons trouvé $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Quand une fonction continue a deux valeurs égales, c'est qu'entre ces deux valeurs, la fonction a atteint un maximum ou un minimum, et par conséquent que la dérivée a passé par zéro ou l'infini. Puisque $\Gamma'(a)$ ne devient pas infinie, il est démontré qu'elle a dû passer par zéro.

On en conclut :

1° Que $\Gamma(a)$ a un minimum et n'en a qu'un seul;

2° Que ce minimum est situé entre $a = 1$ et $a = 2$;

3° Que la valeur de $\Gamma(a)$ qui correspond à ce minimum, est comprise entre 0 et 1;

4° Qu'en deçà et au-delà du minimum, $\Gamma(a)$ croît sans limites.

Ces préliminaires étant établis, nous allons aborder l'étude des propriétés de la fonction Γ, en démontrant une formule de la plus haute importance.

8. *Lemme 1er, h représentant une quantité positive, qui n'est ni nulle ni infinie, on a*

$$\int_a^b e^{-hx} x^{a-1} dx = \frac{1}{h^a} \int_{ah}^{bh} e^{-x'} x'^{a-1} dx'.$$

Il suffit pour le démontrer de poser dans la première intégrale $hx = x'$, et de voir ce que deviennent les limites.

Si $a = \infty$, $b = \infty$, on a

$$\int_0^\infty e^{-hx} x^{a-1}\, dx = \frac{1}{h^a}\int_0^\infty e^{-x'} x'^{a-1}\, dx' = \frac{\Gamma(a)}{h^a}.$$

9. *Lemme* 2me. — a et b représentant des quantités finies plus grandes que 0, l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}}$ est finie et déterminée. En effet, nous aurons :

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}} = \int_0^\varepsilon \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}} + \int_\varepsilon^n \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}} + \int_n^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}}.$$

Or

$$\int_0^\varepsilon \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}} = \mu \int_0^\varepsilon x^{a-1}\, dx = \frac{\mu}{a}\varepsilon^a, \quad 0 < \mu < 1,$$

$$\int_n^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}} = \nu \int_n^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{x^{a+b}} = \frac{\nu}{bn^b}, \quad 0 < \nu < 1,$$

donc

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}} = \int_\varepsilon^n \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}} + \frac{\mu}{a}\varepsilon^a + \frac{\nu}{bn^b}.$$

L'intégrale définie du second membre est finie et déterminée, et la somme des deux autres termes pouvant devenir inférieure à toute limite donnée pour des valeurs suffisamment petites de ε et $\frac{1}{n}$, il est visible qu'on peut toujours assigner deux limites finies et déterminées, aussi rapprochées qu'on le voudra, entre lesquelles se trouve comprise la valeur de l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}}$, qui est par conséquent finie et déterminée.

10. *Théorème fondamental.* $\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^\infty \dfrac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}}$. (*)

Démonstration. — ε désignant une quantité finie plus grande que zéro, on a rigoureusement :

$$\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z} z^{a+b-1}\,dz \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-zx} x^{a-1}\,dx = \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{a-1}\,dx \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\,dz \cdots (1)$$

Si l'on remarque que z variant entre les limites ε et $\frac{1}{\varepsilon}$, on a

$$\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-zx} x^{a-1}\,dx = \int_0^\infty e^{-zx} x^{a-1}\,dx - \int_0^\varepsilon e^{-zx} x^{a-1}\,dx - \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^\infty e^{-zx} x^{a-1}\,dx,$$

et d'après le Lemme 1er,

$$\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-zx} x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{z^a} - \int_0^\varepsilon e^{-zx} x^{a-1}\,dx - \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^\infty e^{-zx} x^{a-1}\,dx.$$

Que d'autre part, x variant entre les limites ε et $\frac{1}{\varepsilon}$, on a de la même manière

$$\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\,dz = \frac{\Gamma(a+b)}{(1+x)^{a+b}} - \int_0^\varepsilon e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\,dz - \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^\infty e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\,dz,$$

on donnera facilement à l'égalité primitive (1) la forme suivante,

---

(*) Cette belle formule est due à Euler, et Poisson est le premier qui l'ait démontrée à l'aide des intégrales doubles. On trouvera sans doute que j'ai considérablement altéré l'élégante simplicité avec laquelle cette démonstration est ordinairement présentée, cela tient à ce que je n'ai voulu employer la formule du Lemme 1er

$$\int_0^\infty e^{-hx} x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{h^a},$$

et que dans le cas où elle est rigoureusement démontrée, c'est-à-dire, pour h fini, et plus grand que 0, sans l'étendre par induction au cas où $h=0$, et $h=\infty$.

$$\Gamma(a)\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z} z^{b-1}\,dz - \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z} z^{a+b-1}\,dz \int_0^{\varepsilon} e^{-zx} x^{a-1}\,dx$$

$$- \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z} z^{a+b-1}\,dz \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-zx} x^{a-1}\,dx,$$

(2)

$$= \Gamma(a+b)\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}} - \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{a+1}\,dx \int_0^{\varepsilon} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\,dz$$

$$- \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{a-1}\,dx \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\,dz.$$

Or, nous allons chercher à donner une forme simple aux quatre intégrales doubles qui entrent dans cette égalité.

1° On a

$$0 < \int_0^{\varepsilon} e^{-zx} x^{a-1}\,dx < \int_0^{\varepsilon} x^{a-1}\,dx$$

ou

$$0 < \int_0^{\varepsilon} e^{-zx} x^{a-1}\,dx < \frac{\varepsilon^a}{a},$$

d'où

$$0 < \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z} z^{a+b-1}\,dz \int_0^{\varepsilon} e^{-zx} x^{a-1}\,dx < \frac{\varepsilon^a}{a}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z} z^{a+b-1}\,dz < \frac{\varepsilon^a}{a}\Gamma(a+b).$$

Donc :

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z} z^{a+b-1}\,dz \int_0^{\varepsilon} e^{-zx} x^{a-1}\,dx = \frac{\mu\varepsilon^a}{a}\Gamma(a+b), \quad 0 < \mu < 1.$$

C'est la 1re intégrale double du 1er membre.

2° On a

$$0 < \int_0^{\varepsilon} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\,dz < \int_0^{\varepsilon} z^{a+b-1}\,dz,$$

10. *Théorème fondamental.* $\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}}$. (*)

Démonstration. — ε désignant une quantité finie plus grande que zéro, on a rigoureusement :

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z} z^{a+b-1}\,dz \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-zx} x^{a-1}\,dx = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{a-1}\,dx \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\,dz \ldots (1)$$

Si l'on remarque que z variant entre les limites ε et $\frac{1}{\varepsilon}$, on a

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-zx} x^{a-1}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-zx} x^{a-1}\,dx - \int_0^{\varepsilon} e^{-zx} x^{a-1}\,dx - \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-zx} x^{a-1}\,dx,$$

et d'après le Lemme 1er,

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-zx} x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{z^a} - \int_0^{\varepsilon} e^{-zx} x^{a-1}\,dx - \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-zx} x^{a-1}\,dx.$$

Que d'autre part, x variant entre les limites ε et $\frac{1}{\varepsilon}$, on a de la même manière

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\,dz = \frac{\Gamma(a+b)}{(1+x)^{a+b}} - \int_0^{\varepsilon} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\,dz - \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\,dz,$$

on donnera facilement à l'égalité primitive (1) la forme suivante,

---

(*) Cette belle formule est due à Euler, et Poisson est le premier qui l'ait démontrée à l'aide des intégrales doubles. On trouvera sans doute que j'ai considérablement altéré l'élégante simplicité avec laquelle cette démonstration est ordinairement présentée, cela tient à ce que je n'ai voulu employer la formule du Lemme 1er

$$\int_0^{\infty} e^{-hx} x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{h^a},$$

et que dans le cas où elle est rigoureusement démontrée, c'est-à-dire, pour h fini, et plus grand que 0, sans l'étendre par induction au cas où $h=0$, et $h=\infty$.

$$\Gamma(a)\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z} z^{b-1}\,dz - \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z} z^{a+b-1}\,dz \int_{0}^{\varepsilon} e^{-zx} x^{a-1}\,dx$$

$$- \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z} z^{a+b-1}\,dz \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-zx} x^{a-1}\,dx,$$

(2)

$$= \Gamma(a+b)\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}} - \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{a+1}\,dx \int_{0}^{\varepsilon} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\,dz$$

$$- \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{a-1}\,dx \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\,dz.$$

Or, nous allons chercher à donner une forme simple aux quatre intégrales doubles qui entrent dans cette égalité.

1° On a

$$0 < \int_{0}^{\varepsilon} e^{-zx} x^{a-1}\,dx < \int_{0}^{\varepsilon} x^{a-1}\,dx$$

ou

$$0 < \int_{0}^{\varepsilon} e^{-zx} x^{a-1}\,dx < \frac{\varepsilon^a}{a},$$

d'où

$$0 < \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z} z^{a+b-1}\,dz \int_{0}^{\varepsilon} e^{-zx} x^{a-1}\,dx < \frac{\varepsilon^a}{a}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z} z^{a+b-1}\,dz < \frac{\varepsilon^a}{a}\Gamma(a+b).$$

Donc :

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z} z^{a+b-1}\,dz \int_{0}^{\varepsilon} e^{-zx} x^{a-1}\,dx = \frac{\mu\varepsilon^a}{a}\Gamma(a+b), \quad 0 < \mu < 1.$$

C'est la 1re intégrale double du 1er membre.

2° On a

$$0 < \int_{0}^{\varepsilon} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\,dz < \int_{0}^{\varepsilon} z^{a+b-1}\,dz,$$

ou

$$0 < \int_0^{\varepsilon} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\, dz < \frac{\varepsilon^{a+b}}{a+b}.$$

Par suite

$$0 < \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{a-1}\, dx \int_0^{\varepsilon} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\, dz < \frac{\varepsilon^{a+b}}{a+b} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{a-1}\, dx < \frac{\varepsilon^b}{a(a+b)}.$$

Et par conséquent

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{a-1}\, dx \int_0^{\varepsilon} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\, dz = \frac{\nu\varepsilon^b}{a(a+b)}, \quad 0 < \nu < 1.$$

C'est la 1re intégrale double du second membre.

3° D'après le Lemme 1er, x variant entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$, on aura

$$\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\, dz = \frac{1}{(1+x)^{a+b}} \int_{\frac{1+x}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-z'} z'^{a+b-1}\, dz'.$$

Si l'on suppose que ε vérifie les conditions

$$\frac{1}{\varepsilon} > a+b+1, \quad \text{et} \quad e^{\frac{1}{\varepsilon}} > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{a+b+1},$$

on aura

$$0 < \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\, dz < \frac{1}{(1+x)^{a+b}} \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-z'} z'^{a+b-1}\, dz' < \frac{\varepsilon}{(1+x)^{a+b}}.$$

D'où

$$0 < \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{a-1}\, dx \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\, dz < \varepsilon \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}} < \varepsilon \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}}.$$

Donc

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{a-1}\, dx \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-z(1+x)} z^{a+b-1}\, dz = \lambda\varepsilon \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

C'est la 2me intégrale double du second membre.

4° Reste la 2me intégrale double du 1er membre.

On a

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z} z^{a+b-1}\, dz \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-zx} x^{a-1}\, dx = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} e^{-z} z^{a+b-1}\, dz \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-zx} x^{a-1}\, dx$$

$$+ \int_{\varepsilon'}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z} z^{a+b-1}\, dz \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-zx} x^{a-1}\, dx.$$

Quant à la 1re de ces deux intégrales doubles, remarquons que z étant compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$, on a évidemment

$$\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-zx} x^{a-1}\, dx < \int_{0}^{\infty} e^{-zx} x^{a-1}\, dx \qquad \text{ou que} \qquad \frac{\Gamma(a)}{z^a}.$$

Par suite, il viendra

$$0 < \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} e^{-z} z^{a+b-1}\, dz \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-zx} x^{a-1}\, dx < \Gamma(a) \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} e^{-z} z^{b-1}\, dz < \frac{\Gamma(a)\varepsilon'^b}{b}.$$

Quant à la 2me, remarquons que si z varie entre les limites ε' et $\frac{1}{\varepsilon}$, on a :

$$\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-zx} x^{a-1}\, dx = \frac{1}{z^a} \int_{\frac{z}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-x'} x'^{a-1}\, dx' < \frac{1}{z^a} \int_{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-x'} x'^{a-1}\, dx',$$

et si l'on suppose que l'on ait

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} > a + 1, \quad \text{et} \quad e^{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}} > \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{a+1},$$

il viendra

$$\int_{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-zx} x^{a-1}\, dx < \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \frac{1}{z^a},$$

et par conséquent, on aura

$$0 < \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} e^{-z} z^{a+b-1}\, dz \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-zx} x^{a-1}\, dx < \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} e^{-z} z^{b-1}\, dz < \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \Gamma(b).$$

En représentant donc par ρ et ρ_1 des coefficients compris entre 0 et l'unité, on aura

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z} z^{a+b-1}\, dz \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-zx} x^{a-1}\, dx = \frac{\rho \varepsilon'^{b} \Gamma(a)}{b} + \rho_1 \Gamma(b) \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}.$$

A l'aide de toutes ces valeurs, l'égalité (2) deviendra

$$\Gamma(a) \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-z} z^{b-1}\, dz - \frac{\mu \varepsilon^{a}}{a} \Gamma(a+b) - \frac{\rho \varepsilon'^{b} \Gamma(a)}{b} - \frac{\rho_1 \varepsilon \Gamma(b)}{\varepsilon'}$$

$$= \Gamma(a+b) \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}} - \frac{\nu \varepsilon^{b}}{a(a+b)} - \lambda \varepsilon \int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}}.$$

Sous les conditions que nous avons posées pour ε et $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$.

Or, sous cette forme, il est visible que si je fais décroître à la fois ε' et $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$, ($\varepsilon$ décroissant alors de lui-même), les deux membres convergeront tous deux vers une limite fixe et déterminée qui est pour le premier $\Gamma(a)\Gamma(b)$ et pour le second $\Gamma(a+b) \int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}}$; on aura donc rigoureusement

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b) \int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}},$$

ou

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}},$$

ce qui est le théorème.

Scolie. — L'intégrale du second membre est désignée sous le nom d'intégrale Eulérienne de première espèce. On donne souvent à la fonction Γ, le nom d'intégrale Eulérienne de 2me espèce.

L'intégrale Eulérienne de 1re espèce peut être mise sous plusieurs formes différentes. Il est évident d'abord que le premier membre dans la formule que nous venons de démontrer, ne changeant point quand on change a en b, et b en a, il doit en être de même du second, et par conséquent, on a

$$(\alpha)\cdots\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\int_0^\infty\frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}}=\int_0^\infty\frac{x^{b-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}}.$$

Ce dont on peut s'assurer directement, car la seconde intégrale résulte de la première en y changeant x en $\frac{1}{x}$.

Si dans ces intégrales, on pose $\frac{x}{1+x}=y$, on aura

$$(\beta)\cdots\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1}\,dy=\int_0^1 y^{b-1}(1-y)^{a-1}\,dy.$$

Si au contraire, on y pose $x=e^z-1$, on aura

$$(\delta)\ \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\int_0^\infty e^{-(a+b-1)z}(e^z-1)^{a-1}\,dz=\int_0^\infty e^{-(a+b-1)z}(e^z-1)^{b-1}\,dz.$$

Ces formes sont remarquables et nous y aurons recours.

Du théorème que nous venons de démontrer, on déduit immédiatement les deux premières propriétés de la fonction Γ.

11. *Première propriété de la fonction* Γ. — Si dans l'équation (α) du numéro précédent, on pose $b=1$, en se rappelant que $\Gamma(1)=1$, on aura

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+1)}=\int_0^\infty\frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{a+1}}=\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x)^{a+1}}=\frac{1}{a},$$

d'où

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a). \qquad (1)$$

C'est la 1re propriété de la fonction Γ. Elle aurait pu se démontrer

directement, soit en intégrant par parties l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x}\, x^{a-1}\, dx$, soit en dérivant par rapport à h, la formule démontrée (N° 8)

$$\int_0^\infty e^{-hx}\, x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{h^a},$$

et posant ensuite $h = 1$.

De la formule $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, on en déduit une autre qui présente la même propriété sous une forme plus générale. En effet, en y remplaçant successivement a par a, $a+1$, $a+2$, $a+3$....., $a+n-1$, n étant un nombre entier positif, il viendra

$$\begin{aligned}
\Gamma(a+1) &= a\Gamma(a)\\
\Gamma(a+2) &= (a+1)\Gamma(a+1)\\
\Gamma(a+3) &= (a+2)\Gamma(a+2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Gamma(a+n) &= (a+n-1)\Gamma(a+n-1).
\end{aligned}$$

Multipliant toutes ces égalités membre à membre, puis faisant disparaître des deux parts le facteur commun $\Gamma(a+1)\,\Gamma(a+2)$ $\Gamma(a+3)\ldots.\,\Gamma(a+n-1)$ qui ne peut jamais devenir ni nul ni infini, on aura

$$\Gamma(a+n) = a(a+1)(a+2)\ldots..(a+n-1)\Gamma(a). \qquad (2)$$

Scolie. — Cette formule fait dépendre la valeur de $\Gamma(a+n)$, de la valeur de $\Gamma(a)$, et réciproquement; il en résulte que la connaissance de la fonction Γ dans ce que nous appellerons une période, c'est-à-dire, entre deux nombres entiers consécutifs, équivaudra à la connaissance entière de la fonction. Ainsi, la fonction Γ étant calculée par exemple pour toutes les valeurs de a comprises entre 5 et 6, on calculera immédiatement $\Gamma(a)$ pour des valeurs de a comprises entre 2 et 3, par la formule

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+3)}{a(a+1)(a+2)}, \quad 2 < a < 3,$$

et $\Gamma(a)$ pour des valeurs de a comprises entre 9 et 10, à l'aide de;

$$\Gamma(a'+4) = a'(a'+1)(a'+2)(a'+3)\Gamma(a'). \quad 5 < a' < 6.$$

Corollaire. — Si dans la formule (2), on pose $a = 1$, on en déduit immédiaiement à cause de $\Gamma(1) = 1$,

$$\Gamma(1 + n) = 1.2.3\ldots\ldots n,$$

qui donne la valeur de $\Gamma(a)$ pour toute valeur entière de a.

12. *Deuxième propriété de la fonction* Γ.

Si dans la formule (α) N° 10; nous faisons $a + b = 1$, nous aurons en remplaçant b par $1 - a$,

$$\Gamma(a)\Gamma(1 - a) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1 + x} dx = \int_0^\infty \frac{x^{-a}}{1 + x} dx. \quad 0 < a < 1.$$

L'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1 + x} dx$ du second membre est connue; elle est égale à $\frac{\pi}{\sin a\pi}$ (*). On a donc :

$$(1) \qquad \Gamma(a)\Gamma(1 - a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad 0 < a < 1.$$

C'est la seconde propriété de la fonction Γ; on lui donne quelquefois une forme plns générale en se servant de la première propriété.

Car si nous supposons $a < 1$, la formule (2) N° 11, donnera

$$\Gamma(a + n) = a(a + 1)(a + 2)\ldots\ldots(a + n - 1)\Gamma(a),$$

et

$$\Gamma(n + 1 - a) = (1 - a)(2 - a)\ldots\ldots(n - a)\Gamma(1 - a),$$

multipliant membre à membre et remplaçant $\Gamma(a)\Gamma(1 - a)$ par $\frac{\pi}{\sin a\pi}$, nous aurons

$$(2) \qquad \Gamma(a + n)\Gamma(n + 1 - a) = a(1^2 - a^2)(2^2 - a^2)(3^2 - a^2)\ldots\ldots [(n - 1)^2 - a^2](n - a)\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

où n a une valeur entière quelconque.

Scolie. — Ces formules (1) et (2) font dépendre la valeur de

(*) Voir la note première.

$\Gamma(n+1-a)$ de celle de $\Gamma(a+n)$, n pouvant être 0, 1, 2, 3, 4.....; en d'autres termes n et $n+1$ étant considérés comme les extrémités d'une période, elles établissent une relation entre les valeurs de la fonction Γ à égale distance des extrémités de la période. Il en résulte que la connaissance d'une demie période équivaudra à la connaissance d'une période entière, et par conséquent, d'après le Scolie du numéro précédent, à la connaissance entière de la fonction.

13. Corollaires de la seconde propriété.

1° $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$

Si dans la formule $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$, on fait $a=\frac{1}{2}$, on aura

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2=\pi.$$

Et comme $\Gamma(a)$ est toujours positif,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

2° $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}.$ (*)

Si dans cette même formule, on fait successivement, n étant un nombre entier, $a=\frac{1}{n}$, $a=\frac{2}{n}\cdots\cdots a=\frac{n-1}{n}$, on obtient :

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}}$$

(*) La 1re et la 2me propriété de la fonction Γ, sont dues à Euler, ainsi que les conséquences que nous en avons tirées jusqu'à celle-ci.

$$\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-3}{n}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{n}}$$

. . . .

. . . .

$$\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{n-2}{n}\right)\pi}\cdot$$

$$\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{n-1}{n}\right)\pi}$$

D'où multipliant entre elles toutes ces égalités, nous aurons en remarquant que dans le 1er membre, chaque facteur se trouve répété deux fois

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}^2=\frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi}.$$

Or, l'on a d'après une formule d'Euler : (*)

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\cdots\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi=\frac{n}{2^{n-1}}\cdot$$

Donc

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}^2=\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}.$$

Et puisque $\Gamma(a)$ est toujours positif

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=+\sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}.$$

(*) Voir la note première.

3° $$\int_a^{a+1} \log \Gamma(a)da = \frac{1}{2}\log 2\pi + a(\log a - 1).$$

Nous avons d'après le corollaire précédent

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

Prenant les logarithmes, et divisant tout par n, on aura en employant une notation connue

$$\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{r=n-1} \log \Gamma\left(\frac{r}{n}\right) = \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2n}\log 2\pi - \frac{1}{2n}\log n.$$

Si nous faisons converger n vers l'infini, en posant $\frac{1}{n} = da$, nous aurons

$$\int_0^1 \log \Gamma(a)da = \frac{1}{2}\log 2\pi.$$

D'autre part, on a identiquement :

$$\int_0^{a+1} \log \Gamma(a)da = \int_0^1 \log \Gamma(a)da + \int_1^{a+1} \log \Gamma(a)da$$

$$= \frac{1}{2}\log 2\pi + \int_0^a \log \Gamma(1+a)da.$$

Comme $\log \Gamma(1+a) = \log a + \log \Gamma(a)$, (1re propriété), il viendra

$$\int_0^{a+1} \log \Gamma(a)da = \frac{1}{2}\log 2\pi + \int_0^a \log a da + \int_0^a \log \Gamma(a)da;$$

d'où

$$\int_a^{a+1} \log \Gamma(a)da = \frac{1}{2}\log 2\pi + a(\log a - 1).\ (*)$$

(*) Cette intégrale définie assez remarquable a été donnée par M. Raabe de Zurich, dans le tome XXV du journal de Crelle.

14. *Expression de la dérivée de log* $\Gamma(a)$.

On a d'après la définition

$$\Gamma(b) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{b-1}\, dx,$$

et d'après l'équation (δ) N° 10,

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^\infty \frac{e^{-x(a+b-1)}}{(e^x-1)^{1-b}}\, dx.$$

Si on applique à ces deux formules, la 1re propriété $\Gamma(b) = \frac{\Gamma(1+b)}{b}$, elles deviendront :

$$\frac{\Gamma(1+b)}{b} = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{b-1}\, dx,$$

et

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(1+b)}{b\Gamma(a+b)} = \int_0^\infty \frac{e^{-x(a+b-1)}}{(e^x-1)^{1-b}}\, dx.$$

Retranchant membre à membre la 1re égalité de la 2me, il viendra

$$\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}\; \frac{\Gamma(1+b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^\infty \left(e^{-x}\, x^{b-1} - \frac{e^{-x(a+b-1)}}{(e^x-1)^{1-b}}\right) dx.$$

Cette formule étant vraie, quel que soit b, pourvu qu'il reste positif, faisons le tendre vers zéro. $\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}$ tendra vers $\frac{d\Gamma(a)}{da}$ ou $\Gamma'(a)$ qui est fini et limité pour toute valeur finie de a plus grande que zéro, et $\frac{\Gamma(1+b)}{\Gamma(a+b)}$ convergera vers $\frac{1}{\Gamma(a)}$, le premier membre convergera donc vers la limite finie et déterminée $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$ ou $\frac{d\log\Gamma(a)}{da}$. Quand au second membre, il convergera vers $\int_0^\infty \left(e^{-x}\, x^{-1} - \frac{e^{-x(a-1)}}{e^x-1}\right) dx$, qui est fini et limité, comme il est facile de le prouver, en remarquant que

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-(a-1)x}}{e^x-1}\right) dx = \int_0^n \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-(a-1)x}}{e^x-1}\right) dx$$

$$+ \int_n^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-(a-1)x}}{e^x-1}\right) dx.$$

La première de ces intégrales est finie et déterminée, les limites étant finies, et la fonction sous le signe d'intégration ne devenant jamais infinie entre les limites; la seconde de ces intégrales converge vers zéro avec n. Il viendra donc rigoureusement :

$$(1) \quad \frac{d \log \Gamma(a)}{da} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-(a-1)x}}{e^x-1}\right) dx.$$

Scolie. — En partant des formules

$$\Gamma(b) = \int_0^\infty e^{-x} x^{b-1}\, dx, \quad \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^\infty \frac{x^{b-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}},$$

on aurait obtenu de la même manière :

$$(2) \quad \frac{d \log \Gamma(a)}{da} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x(1+x)^a}\right) dx.$$

A l'aide des suivantes (Nos 5 et 10)

$$\Gamma(b) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{b-1} dx, \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx,$$

on aurait eu

$$\frac{d \log \Gamma(a)}{da} = \int_0^1 \left(\frac{1}{\log \frac{1}{x}} - \frac{x^{a-1}}{1-x}\right) dx.$$

15. ***Corollaires du théorème précédent.***

1° Nous avons

$$\frac{d \log \Gamma(a)}{da} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-(a-1)x}}{e^x-1}\right) dx.$$

De même

$$\frac{d \log \Gamma(b)}{db} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-(b-1)x}}{e^x - 1} \right) dx.$$

Si nous soustrayons ces deux égalités membre à membre, il viendra :

$$(1) \quad \frac{d \log \Gamma(a)}{da} - \frac{d \log \Gamma(b)}{db} = \int_0^\infty \frac{e^{-(b-1)x} - e^{-(a-1)x}}{e^x - 1} dx.$$

En partant des autres formes du théorème précédent, on aurait eu de même

$$(2) \quad \frac{d \log \Gamma(a)}{da} - \frac{d \log \Gamma(b)}{db} = \int_0^\infty \frac{1}{x} \left(\frac{1}{(1+x)^b} - \frac{1}{(1+x)^a} \right) dx.$$

$$(3) \quad \frac{d \log \Gamma(a)}{da} - \frac{d \log \Gamma(b)}{db} = \int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{1-x} dx.$$

2° Si dans les formules précédentes, on pose $b = 1$, et qu'on représente par $-$C, la valeur de $\frac{d \log \Gamma(b)}{db}$ ou $\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)}$ pour $b = 1$, (nous représentons cette valeur par $-$C, parce qu'il résulte de ce qui a été dit N° 7 que $\Gamma'(1)$ est négatif), nous aurons :

$$(1) \quad \frac{d \log \Gamma(a)}{da} = -C + \int_0^\infty \frac{1 - e^{-(a-1)x}}{e^x - 1} dx,$$

ou bien

$$(2) \quad \frac{d \log \Gamma(a)}{da} = -C + \int_0^\infty \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^a} \right) dx$$

$$= -C + \int_0^1 \frac{1 - x^{a-1}}{1-x} dx. \quad (3)$$

La valeur de la constante C qui est d'ailleurs égale d'après la valeur

de $\frac{d\log\Gamma(a)}{da}$ à $\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx$ ou $\int_0^1\left(\frac{1}{l(x)}+\frac{1}{1-x}\right)dx$, a été déterminée par Euler qui a trouvé

$$C = 0,\ 57721566490132.....$$

3° En intégrant par rapport à a, depuis 1 jusqu'à a les formules trouvées dans le N° 14, pour $\frac{d\log\Gamma(a)}{da}$, on obtient $\log\Gamma(a)$ sous forme d'intégrale définie, et l'on a :

$$(1)\quad \log\Gamma(a) = \int_0^\infty \left[(a-1)e^{-x} - \frac{1-e^{-(a-1)x}}{e^x-1}\right]\frac{dx}{x},$$

$$(2)\quad \log\Gamma(a) = \int_0^\infty \left[(a-1)e^{-x} - \frac{1}{(1+x)\log(1+x)} + \frac{1}{(1+x)^a\log(1+x)}\right]\frac{dx}{x},$$

$$(3)\quad \log\Gamma(a) = \int_0^1 \left((a-1) - \frac{1-x^{a-1}}{1-x}\right)\frac{dx}{\log\frac{1}{x}}.$$

16. *Troisième propriété de la fonction* Γ. *Théorème de Gauss.*

Nous avons obtenu (15, 1°) :

$$\frac{d\log\Gamma(a)}{da} - \frac{d\log\Gamma(b)}{db} = \int_0^\infty \frac{e^x}{e^x-1}(e^{-bx}-e^{-ax})\,dx.$$

Si dans cette formule, nous faisons successivement, n étant un nombre entier

$$a = a, \quad = a + \frac{1}{n}, \quad = a + \frac{2}{n} \cdots\cdots = a + \frac{n-1}{n},$$

nous aurons en ajoutant toutes les équations résultantes et supposant $b = na$

$$\frac{1}{da}\,d\log\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)-\frac{nd\log\Gamma(na)}{d(na)}$$

ou

$$\frac{1}{da}\,d\log\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)}$$

$$=\int_0^\infty\frac{e^x}{e^x-1}\left[ne^{-nax}-e^{-ax}\left(1+e^{-\frac{1}{n}x}+e^{-\frac{2}{n}x}\cdots\cdots+e^{-\frac{n-1}{n}x}\right)\right]dx.$$

Et comme

$$1+e^{-\frac{1}{n}x}+\cdots\cdots e^{-\frac{n-1}{n}x}=\frac{1-e^{-x}}{1-e^{-\frac{1}{n}x}},$$

il viendra

$$\frac{1}{da}\,d\log\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)}=\int_0^\infty\left(\frac{ne^xe^{-nax}}{e^x-1}-\frac{e^{-ax}}{1-e^{-\frac{1}{n}x}}\right)dx.$$

L'intégrale du second membre étant finie et déterminée est égale à la limite vers laquelle converge

$$\int_\varepsilon^\infty\left(\frac{ne^x\,e^{-nax}}{e^x-1}-\frac{e^{-ax}}{1-e^{-\frac{1}{n}x}}\right)dx$$

quand ε converge vers zéro.

On aura donc

$$\int_0^\infty\left(\frac{ne^x\,e^{-nax}}{e^x-1}-\frac{e^{-ax}}{1-e^{-\frac{1}{n}x}}\right)dx=\lim\int_\varepsilon^\infty\left(\frac{ne^x\,e^{-nax}}{e^x-1}-\frac{e^{-ax}}{1-e^{-\frac{1}{n}x}}\right)dx$$

$$=\lim\int_\varepsilon^\infty\left(\frac{ne^{-nax}}{1-e^{-x}}-\frac{e^{-ax}}{1-e^{-\frac{1}{n}x}}\right)dx=\lim\left(\int_\varepsilon^\infty\frac{ne^{-nax}}{1-e^{-x}}dx-\int_\varepsilon^\infty\frac{e^{-ax}}{1-e^{-\frac{1}{n}x}}dx.\right)$$

Si dans l'intégrale $\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-ax}}{1-e^{-\frac{1}{n}x}} dx$, on remplace x par nx, elle deviendra : $\int_{\frac{\varepsilon}{n}}^{\infty} \frac{ne^{-nax}}{1-e^{-x}} dx$; donc :

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{ne^{x}e^{-nax}}{e^{x}-1} - \frac{e^{-ax}}{1-e^{-\frac{1}{n}x}} \right) dx = \lim \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{ne^{-nax}}{1-e^{-x}} dx - \int_{\frac{\varepsilon}{n}}^{\infty} \frac{ne^{-nax}}{1-e^{-x}} dx \right)$$

$$= \lim \left(-n \int_{\frac{\varepsilon}{n}}^{\varepsilon} \frac{e^{-nax}}{1-e^{-x}} dx \right).$$

Les facteurs e^{-nax} et $\frac{1}{1-e^{-x}}$ étant toujours positifs dans les limites de l'intégration, on aura, en représentant par ε_1, une qnantité comprise entre $\frac{\varepsilon}{n}$ et ε

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{ne^{x}e^{-nax}}{e^{x}-1} - \frac{e^{-ax}}{1-e^{-\frac{1}{n}x}} \right) dx = \lim \left(-ne^{-na\varepsilon_1} \int_{\frac{\varepsilon}{n}}^{\varepsilon} \frac{dx}{1-e^{-x}} \right).$$

Or $\int_{\frac{\varepsilon}{n}}^{\varepsilon} \frac{dx}{1-e^{-x}} = \log \frac{e^{\varepsilon}-1}{e^{\frac{\varepsilon}{n}}-1}$; donc

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{ne^{x}e^{-nax}}{e^{x}-1} - \frac{e^{-ax}}{1-e^{-\frac{1}{n}x}} \right) dx = \lim \left(-ne^{-na\varepsilon_1} \log \frac{e^{\varepsilon}-1}{e^{\frac{\varepsilon}{n}}-1} \right).$$

Or, si nous faisons converger ε vers zéro, $e^{-na\varepsilon_1}$ convergera vers l'unité, et $\log \frac{e^{\varepsilon}-1}{e^{\frac{\varepsilon}{n}}-1}$ convergera vers $\log n$, on aura donc rigoureusement

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{ne^{x}e^{-nax}}{e^{x}-1} - \frac{e^{-ax}}{1-e^{-\frac{1}{n}x}} \right) dx = -n \log n,$$

et par suite

$$\frac{1}{da} d \log \frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)} = -n \log n.$$

D'où l'on tire en intégrant et passant des logarithmes aux nombres :

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)} = Cn^{-na}.$$

Pour déterminer la constante, faisons $a = \frac{1}{n}$, il viendra

$$C = n\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Et la valeur du second membre étant connue (13, 2°), on aura

$$C = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}.$$

D'où en remplaçant,

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-na}\Gamma(na).$$

C'est la troisième propriété de la fonction Γ. Elle est due à Gauss.

Corollaire. — En posant successivement dans la formule de Gauss $n=2$, $n=3$, $n=5$,.... etc., on en déduit comme cas particuliers les formules suivantes :

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}-2a}\Gamma(2a),$$

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{3}\right) = (2\pi)\, 3^{\frac{1}{2}-3a}\Gamma(3a),$$

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{5}\right)\Gamma\left(a+\frac{3}{5}\right)\Gamma\left(a+\frac{4}{5}\right) = (2\pi)^2 5^{\frac{1}{2}-5a}\Gamma(5a),$$

etc.

Scolie. — La formule de Gauss a été démontrée d'un grand nombre de manières; on peut consulter à ce sujet : LEGENDRE, *Exercices de Calcul Intégral* et *Traité des fonctions elliptiques;* CAUCHY, *Exercices de mathématiques,* 1827*; Exercices d'analyse,* tome II, 1841; LEJEUNE DIRICHLET, tome 15 du *Journal de Crelle* et les tomes XXII et XXIII des *Mémoires couronnés de l'Académie de Belgique*, où l'on trouvera, outre la démonstration que nous avons donnée, deux autres déduites de formules générales, par Mr SCHAAR. Tout récemment encore, Mr LIOUVILLE a démontré dans son journal, cette célèbre formule par l'emploi des intégrales multiples. On pourrait ajouter encore la démonstration de Mr BINET, *Journal de l'école polytechnique,* tome XVI, mais elle est sujette à une observation importante qui sera faite plus loin.

17. *Les trois propriétés de la fonction* Γ *prises ensemble, déterminent entièrement cette fonction.*

Après avoir reconnu que la fonction Γ jouit des trois propriétés suivantes

$$(1) \quad \Gamma(a+1)=a\Gamma(a),$$

$$(2) \quad \Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi} \quad 0<a<1,$$

$$(3) \quad \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=+(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-na}\Gamma(na),$$

il est intéressant de rechercher si ces propriétés suffisent à sa détermination, c'est-à-dire, examiner la question de savoir si une fonction finie et continue qui serait assujettie à satisfaire soit une, soit deux, soit les trois équations énoncées, serait par cela même entièrement déterminée pour toute valeur positive de l'argument. Or, il est facile de voir que

1° Les équations (1) et (2) prises ensemble laissent $\Gamma(a)$ entièrement arbitraire dans une demie période, par exemple depuis 0 jusqu'à $\frac{1}{2}$.

2° Les équations (1) et (3) sont satisfaites par une fonction de la forme $(4\sin^2 a\pi)^\alpha\,\Gamma(a)$, α étant un exposant positif arbitraire.

3° Enfin que une fonction de la forme $b^{a-\frac{1}{2}}\Gamma(a)$, b étant à volonté vérifie les équations (2) et (3).

Il en résulte que deux quelconques des propriétés prises ensemble sont insuffisantes pour déterminer la fonction Γ. A plus forte raison, une seule n'y peut-elle suffire, mais il n'en est pas de même des trois propriétés prises ensemble.

Soit en effet, a étant > 0, $\Gamma(a)$ une fonction finie et continue assujettie aux trois équations énoncées.

1° L'équation (1) combinée avec l'équation (2) donne facilement

$$\Gamma(a)\Gamma(2-a)=\frac{\pi(1-a)}{\sin(1-a)\pi} \quad 0<a<1.$$

Faisant converger a vers l'unité dans les deux membres, on aura à la limite $\Gamma^2(1)=1$, ou $\Gamma(1)=\pm 1$, le signe restant jusqu'ici arbitraire. En tout cas cette valeur de $\Gamma(1)$ combinée avec l'équation (1) fera voir que $\Gamma(a)$ ne s'évanouit pour aucune valeur entière de a.

2° $\Gamma(a)$ ne s'évanouit pas non plus pour aucune valeur de a plus grande que 0 et plus petite que l'unité, ce qui résulte immédiatement de la formule

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi} \quad 0<a<1,$$

jointe à l'hypothèse que $\Gamma(a)$ reste constamment fini. A l'aide de l'équation (1), on en déduit que $\Gamma(a)$ ne s'évanouit pour aucune valeur de a.

3° Une fonction finie et continue, ne changeant de signe qu'après avoir passé par 0, il résulte de ce que nous venons de dire que $\Gamma(a)$ sera constamment positif ou négatif. Or, l'équation (3) donne pour $a=\frac{1}{2}$ et $n=2$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)=+\sqrt{\pi}\,\Gamma(1),$$

ou comme $\Gamma(1)$ ne s'évanouit point

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=+\sqrt{\pi}.$$

$\Gamma(a)$ est donc constamment positif.

4° Tout ceci étant posé, $\log \Gamma(a)$ sera une fonction finie et continue. Dans la formule (3), prenons les logarithmes des deux membres, nous aurons en dérivant par rapport à a, et employant une notation connue

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{d \log \Gamma\left(a+\frac{r}{n}\right)}{da} = \frac{d \log \Gamma(na)}{da} - n \log n.$$

Appliquant à tous les Γ contenus dans cette équation, la formule (1), et divisant tout par n, il vient

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{1}{n} \frac{d \log \Gamma\left(a+1+\frac{r}{n}\right)}{da} - \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{1}{an+r}$$

$$= \frac{d \log \Gamma(na+1)}{d(na)} - \frac{1}{an} - \log n.$$

D'où supprimant dans les deux membres $-\frac{1}{an}$ et remplaçant an par a',

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{1}{n} \frac{d \log \Gamma\left(a+1+\frac{r}{n}\right)}{da} - \sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{1}{a'+r}$$

$$= \frac{d \log \Gamma(a'+1)}{da'} - \log n.$$

Comme $\frac{1}{a'+r} = \int_0^\infty e^{-(a'+r)x}\, dx$, on aura

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{1}{a'+r} = \int_0^\infty e^{-a'x} \frac{1-e^{-(n-1)x}}{e^x-1} dx.$$

D'autre part, nous avons vu (16) que

$$\int_0^\infty \left(\frac{ne^{-nax} e^x}{e^x - 1} - \frac{e^{-ax}}{1-e^{-\frac{1}{n}x}} \right) dx = -n \log n,$$

ou en faisant $a = 1$,

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-(n-1)x}}{e^x - 1} - \frac{e^{-x}}{n\left(1 - e^{-\frac{1}{n}x}\right)} \right) dx = -\log n.$$

A l'aide de ces relations, notre égalité deviendra

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{1}{n} \frac{d \log \Gamma\left(a + 1 + \frac{r}{n}\right)}{da}$$

$$+\int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{n\left(1 - e^{-\frac{1}{n}x}\right)} - \frac{e^{-a'x}}{e^x - 1} + \frac{e^{-(n-1)x}(e^{-a'x} - 1)}{e^x - 1} \right) dx = \frac{d \log \Gamma(a'+1)}{da'}$$

Cette relation étant vraie quelle que soit la valeur entière de n, si nous le faisons converger vers l'infini,

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{1}{n} \frac{d \log \Gamma\left(a + 1 + \frac{r}{n}\right)}{da}$$

convergera vers

$$\int_{a+1}^{a+2} \frac{d \log \Gamma(a+1)}{da} da = \log \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a+1)} = \log(a+1) = 0,$$

puisque $a = \frac{a'}{n}$.

Quant à l'intégrale définie, on reconnaît facilement qu'elle converge vers la limite finie et déterminée $\int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-a'x}}{e^x - 1} \right) dx$; le second membre restant constant, on aura rigoureusement :

$$\frac{d \log \Gamma(a' + 1)}{da'} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-a'x}}{e^x - 1} \right) dx,$$

ou en intégrant, et déterminant la constante, par la condition que $\Gamma(1) = 1$, on aura :

$$\log \Gamma(a' + 1) = \int_0^\infty \left(a'e^{-x} - \frac{1 - e^{-a'x}}{e^x - 1} \right) \frac{dx}{x},$$

dont on voit facilement l'identité avec une formule déjà trouvée (15,3°). Il est donc démontré que les trois propriétés de la fonction Γ, prises ensemble, équivalent à sa définition.

Il en résulte que si l'on pouvait démontrer l'équation (3) en n'employant que les deux premières équations, ces deux premières équations suffiraient à définir la fonction elle-même : ce qui est impossible d'après ce que nous avons vu (1°). Or, c'est ce que M. Binet a fait dans le mémoire déjà cité. Il a démontré la formule de Gauss, en n'employant que l'équation (1) et les valeurs particulières $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\Gamma(1)$ qui résultent toutes deux au signe près des deux premières équations. La démonstration doit donc être vicieuse. L'erreur provient de ce qu'en intégrant une équation aux différences finies, M. Binet n'a point supposé à la constante arbitraire, la généralité qu'elle doit avoir dans ces sortes d'intégration.

18. *Définition de la fonction* $\Gamma(a)$ *quand* a *est négatif.* — Nous n'avons défini jusqu'ici la fonction $\Gamma(a)$, que pour des valeurs positives de a. Pour la déterminer quand a est négatif, nous donnerons toute la généralité possible à la seconde propriété de cette fonction, et nous poserons pour toute valeur réelle de a,

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}\cdot$$

Si la valeur absolue de a est supérieure à l'unité, des deux quantités a et $1-a$, l'une sera nécessairement négative et l'autre positive, et nous pourrons calculer $\Gamma(a)$ pour des valeurs négatives, si nous le connaissons pour des valeurs positives. Il résulte immédiatement de cette formule que $\Gamma(a)$ est infini et par conséquent discontinu pour des valeurs entières et négatives de a, ainsi que pour $a=0$; il est au contraire fini, déterminé et continu pour toutes autres valeurs.

Or, il est remarquable que la fonction $\Gamma(a)$ étant ainsi déterminée pour des valeurs négatives, elle jouit encore des propriétés (1) et (3) qni deviennent par conséquent générales.

En effet, supposons a une quantité positive, et changeons dans la formule

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

a en $a+1$, nous aurons :

$$\Gamma(a+1)\,\Gamma(-a) = -\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

D'où $\dfrac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(-a)} = -\dfrac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = -a$, ou $\Gamma(1-a) = -a\Gamma(-a)$,

ce qui est la 1[re] propriété pour des valeurs négatives de l'argument. D'autre part, la formule (3) donnera facilement :

$$\frac{2^{n-1}\,\pi^n}{\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{na-\frac{1}{2}}\,\pi}{\Gamma(na)}.$$

Or, on a d'après une formule d'Euler (*)

$$\sin a\pi \sin\left(a+\frac{1}{n}\right)\pi \cdots \sin\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\pi = \frac{\sin na\pi}{2^{n-1}}.$$

Combinant ces deux formules, il vient

$$\frac{\pi}{\Gamma(a)\sin a\pi}\cdot\frac{\pi}{\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\sin\left(a+\frac{1}{n}\right)\pi}\cdots\frac{\pi}{\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\sin\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\pi}$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{+na-\frac{1}{2}}\,\pi}{\Gamma(na)\,\sin na\pi}.$$

D'où si l'on applique à tous les Γ, la propriété (2) qui est supposée générale, on aura :

$$\Gamma(1-a)\,\Gamma\left(-a+\frac{n-1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(-a+\frac{1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{+na-\frac{1}{2}}\,\Gamma(1-na),$$

ou comme $\Gamma(1-a) = -a\Gamma(-a)$ et $\Gamma(1-na) = -na\Gamma(-na)$,

$$\Gamma(-a)\,\Gamma\left(-a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(-a+\frac{n-1}{n}\right) = +\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}+na}\,\Gamma(-na),$$

ce qui est la 3[me] propriété pour des valeurs négatives de l'argument.

(*) Voir la note première.

De ceci et de ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent, il résulte que l'on pourrait définir d'une manière générale la fonction $\Gamma(a)$:

Une fonction finie et continue pour toutes les valeurs positives de a, et assujettie à vérifier constamment les trois équations :

$$\Gamma(1+a) = a\Gamma(a),$$

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-na}\,\Gamma(na).$$

19. *Définition de Gauss.* — Dans ses recherches très fécondes sur la fonction Γ, Gauss posait :

$$\Gamma(a) = \lim\left(\frac{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots\ n\ .\ n^{a-1}}{a(a+1)(a+2)\cdots\cdots(a+n-1)}\right),\quad n=\infty.$$

Cette expression ayant l'avantage d'être applicable également aux valeurs positives comme aux valeurs négatives de a. On la déduit facilement dans le cas de a positif, d'une formule à laquelle nous sommes arrivés. En effet, l'on a eu (17, 4°)

$$\frac{d\log\Gamma(a'+1)}{da'} = \log n - \sum_{r=1}^{r=n-1}\frac{1}{a'+r}$$

$$-\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{1}{n}\frac{d\log\Gamma\left(a+1+\frac{r}{n}\right)}{da},\quad a=\frac{a'}{n}.$$

En faisant converger n vers l'infini, on a :

$$\frac{d\log\Gamma(a'+1)}{da'} = \lim\left(\log n - \sum_{r=1}^{r=n-1}\frac{1}{a'+r}\right),\quad n=\infty.$$

D'où intégrant, et déterminant la constante par la condition que $\log\Gamma(1)=0$, on obtiendra immédiatement :

$$\Gamma(a'+1) = \lim\left(\frac{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots\ n.\ n^{a}}{(a'+1)(a'+2)(a'+3)\cdots\cdots(a'+n)}\right),\quad n=\infty,$$

dont on voit facilement l'identité avec la définition de Gauss.

En s'aidant d'autre part de la formule de Jean Bernoulli,

$$\frac{\pi}{\sin a'\pi} = a'(1+a')(1-a')\left(1+\frac{a'}{2}\right)\left(1-\frac{a'}{2}\right)\left(1+\frac{a'}{3}\right)\left(1-\frac{a'}{3}\right)\cdots \text{etc.}$$

On verra immédiatement que la forme de la fonction $\Gamma(a)$ reste la même quand a est négatif.

Lorsqu'on prend la formule

$$\Gamma(a) = \lim \left(\frac{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots n.\ n^{a-1}}{a\cdot(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}\right), \quad n = \infty,$$

pour définition de la fonction Γ, les trois propriétés se démontrent d'une manière générale avec une remarquable facilité; mais comme nous nous plaçons à un autre point de vue, nous ne nous y arrêterons pas, et nous aborderons le calcul approximatif de $\Gamma(a)$, a étant supposé positif, puisque $\Gamma(-a)$ peut se déduire immédiatement de la valeur de $\Gamma(+a)$.

CHAPITRE II.

DU CALCUL APPROXIMATIF DE LOG $\Gamma(a)$.

FORMATION ET USAGE DES TABLES.

20. *Théorème.* — $\operatorname{Log}\Gamma(1+a)=\frac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1)$

$$+\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\frac{e^{-ax}}{x}\,dx.$$

Nous avons trouvé (14)

$$\frac{d\log\Gamma(a)}{da}=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-x}}{x}-\frac{e^{-(a-1)x}}{e^x-1}\right)dx.$$

On en tire facilement

$$\frac{d\log\Gamma(1+a)}{da}=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x}\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-ax}\,dx$$

$$-\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)e^{-ax}\,dx,$$

qui nous donne immédiatement :

$$\frac{d\log\Gamma(1+a)}{da}=\log a+\frac{1}{2a}-\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)e^{-ax}\,dx.$$

Et en intégrant

$$\log \Gamma(1+a) = c + a(\log a - 1) + \frac{1}{2}\log a + \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-ax}}{x}\,dx.$$

Nous représenterons l'intégrale définie du second membre par $\tilde\omega(a)$.

Pour déterminer la constante, nous ferons $a = \frac{1}{2}$, on a alors :

$$\tilde\omega\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{x}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

D'autre part

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-x}}{x}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-2x}}{x}\,dx.$$

D'où

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{e^{-x}}{e^{2x} - 1} - \frac{2 - e^{-x}}{2x} + \frac{1 - e^{-x}}{2}\right)\frac{e^{-x}}{x}\,dx = 0.$$

Combinant cette formule avec la valeur de $\tilde\omega\left(\frac{1}{2}\right)$, on aura en remarquant que

$$\frac{1}{e^x - 1} - \frac{e^{-x}}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{e^{2x} - 1} = e^{-x},$$

$$\tilde\omega\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} - e^{-x}\right)\frac{e^{-x}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2} - \frac{e^{-2x}}{x}\right)dx.$$

L'intégrale du second membre est connue, et l'on a :

$$\tilde\omega\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \log 2).$$

Comme $\log \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log \pi$, on aura pour la valeur de la constante

$$c = \frac{1}{2}\log 2\pi.$$

Et par conséquent

$$\log \Gamma(1 + a) = \frac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \tilde{\omega}(a)$$

$$\tilde{\omega}(a) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-ax}}{x}\,dx.$$

C'est de cette forme que nous partirons pour établir plusieurs développements en série de $\log \Gamma(1 + a)$.

§ 1er. Formule de Stirling.

21. *Lemme.* $$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + 2\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{x}{x^2 + 4r^2\pi^2}.$$

En décomposant d'après les méthodes connues la fraction $\frac{1}{y^{2n} - 1}$ en une somme de fractions du second degré, on a :

$$\frac{1}{y^{2n} - 1} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{y^2 - 1} + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{y\cos\frac{r\pi}{n} - 1}{y^2 - 2y\cos\frac{r\pi}{n} + 1}.$$

D'où :

$$\frac{1}{y^{2n} - 1} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{y^2 - 1} + \frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{r=n-1} \left(\frac{-y^2 + 2y\cos\frac{r\pi}{n} - 1 + y^2 - 1}{y^2 - 2y\cos\frac{r\pi}{n} - 1}.\right)$$

$$\frac{1}{y^{2n} - 1} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{y^2 - 1} - \frac{n-1}{2n} + \frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{y^2 - 1}{y^2 - 2y\cos\frac{r\pi}{n} - 1}.$$

Par suite :

$$\frac{1}{y^{2n} - 1} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{y^2 - 1} - \frac{n-1}{2n} + \frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{y^2 - 1}{(y-1)^2 + 4y\sin^2\frac{r\pi}{2n}}.$$

Faisons $y = 1 + \frac{x}{2n}$, il viendra :

$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{2n}\right)^{2n}-1} = \frac{1}{n}\frac{1}{\frac{x}{n}+\frac{x^2}{4n^2}} - \frac{n-1}{2n}$$

$$+ \frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{\frac{x}{n}+\frac{x^2}{4n^2}}{\frac{x^2}{4n^2}+4\left(1+\frac{x}{2n}\right)\sin^2\frac{r\pi}{2n}},$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{2n}\right)^{2n}-1} = \frac{1}{x+\frac{x^2}{4n}} - \frac{n-1}{2n}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{4x+\frac{x^2}{n}}{x^2+16\left(n^2+\frac{nx}{2}\right)\sin^2\frac{r\pi}{2n}}.$$

Si l'on fait converger n vers l'infini, on aura en remarquant que les deux membres convergent tous deux vers une limite finie et déterminée pour toute valeur finie de x,

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + 2\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{x}{x^2+4r^2\pi^2},$$

ce qui est le lemme énoncé.

22. *Théorème.* $\log \Gamma(1+a) = \frac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1)$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}.$$

Le lemme précédent donne immédiatement :

$$\int_\varepsilon^n \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-ax}}{x}dx = 2\sum_{r=1}^{r=\infty}\int_\varepsilon^n \frac{e^{-ax}\,dx}{x^2+4r^2\pi^2}.$$

Puis faisant converger ε et $\frac{1}{n}$ vers 0, le second membre convergeant vers une limite finie et déterminée, ainsi qu'il serait facile de le démontrer, on aura (N° 20)

$$\tilde{\omega}(a) = 2\sum_{r=1}^{r=\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\,dx}{x^2 + 4r^2\pi^2}.$$

Or, r étant une quantité finie et positive, on démontre par une simple transformation que

$$\int_0^\infty \frac{2e^{-ax}\,dx}{x^2 + 4r^2\pi^2} = \frac{1}{r\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-2r\pi ax}\,dx}{1 + x^2}.$$

On en tire :

$$2\sum_{r=1}^{r=n} \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\,dx}{x^2 + 4r^2\pi^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r} e^{-2r\pi ax}}{1 + x^2}\,dx.$$

Eaisant converger n vers l'infini, on aura :

$$\tilde{\omega}(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2}\left(\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r} e^{-2r\pi ax}.\right)$$

Comme pour toute valeur finie de x plus grande que 0

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{e^{-2r\pi ax}}{r} = \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi ax}},$$

on aura :

$$\frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^n \frac{dx}{1 + x^2}\left(\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{e^{-2r\pi ax}}{r}\right) = \frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^n \frac{dx}{1 + x^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi ax}}.$$

Puis faisant converger ε et $\frac{1}{n}$ vers zéro, on aura, le second membre convergeant vers une limite finie et déterminée,

$$\tilde{\omega}(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi ax}}.$$

Et par suite (N° 20)

$$\log \Gamma(1+a) = \frac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}} \quad (*)$$

25. *Théorème. — Si l'on pose en général*

$$A_{2m} = \frac{2}{(2\pi)^{2m}}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{2m}}$$

l'on aura, m étant un nombre entier :

$$\varpi(a) = \frac{A_2}{a} - \frac{1.\,2.\,A_4}{a^3} + \cdots\cdots + (-1)^{m-1}\frac{\Gamma(2m-1)A_{2m}}{a^{2m-1}}$$

$$+ (-1)^m \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}dx.$$

En effet, on a l'équation identique :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty x^{2m-2}\,dx\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}.$$

D'autre part, en s'aidant des deux égalités

$$\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}} = \sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{e^{-2r\pi a x}}{r}, \quad ax > 0$$

et

$$\int_0^\infty x^{2m-2}e^{-2r\pi a x}\,dx = \frac{\Gamma(2m-1)}{(2r\pi a)^{2m-1}} \text{ (N° 8)}, \quad ra > 0,$$

on démontrera facilement que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty x^{2m-2}\,dx\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}} = \frac{2\Gamma(2m-1)}{(2\pi)^{2m}a^{2m-1}}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{2m}} = \frac{\Gamma(2m-1)}{a^{2m-1}}A_{2m}.$$

(*) Cette formule remarquable est due à Mr Schaar qui l'a démontrée dans le tome XII de l'Académie de Belgique.

Par suite, on aura

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}=\frac{\Gamma(2m-1)}{a^{2m-1}}A_{2m}.$$

En faisant successivement dans cette formule $m=1, 2, 3, 4\ldots.\ m$, on en tirera facilement

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\log\frac{1}{(1-e^{-2\pi ax})}=+\frac{A_2}{a}-\frac{1.2.A_4}{a^3}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{\Gamma(2m-1)A_{2m}}{a^{2m-1}}$$

$$+(-1)^m\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}.$$

Et comme $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}=\tilde{\omega}(a)$, on aura la formule demandée.

24. *Formule de Stirling.* — On sait que les coefficients A_2, A_4.. .. sont liés avec les nombres Bernoulliens B_1, B_3..... par la relation :

$$1.\ 2.\ 3\ldots..\ 2m\ .\ A_{2m}=B_{2m-1}.$$

Si donc dans la valeur de $\tilde{\omega}(a)$ que nous venons de trouver, on remplace, les coefficients A_{2m} par leur valeur à l'aide des nombres Bernoulliens, il viendra :

$$\tilde{\omega}(a)=\frac{B_1}{1.\ 2.\ a}-\frac{B_3}{3.\ 4.\ a^3}+\frac{B_5}{5.\ 6.\ a^5}\cdots\cdots+\frac{(-1)^{m-1}B_{2m-1}}{(2m-1)2m\ a^{2m-1}}$$

$$+(-1)^m\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}.$$

Et par suite, on a :

$$\log\Gamma(1+a)=\frac{1}{2}\log 2\pi a+a(\log a-1)+\frac{B_1}{1.\ 2.\ a}-\frac{B_3}{3.\ 4.\ a^3}+\frac{B_5}{5.\ 6.\ a^5}\cdots.$$

$$+\frac{(-1)^{m-1}B_{2m-1}}{(2m-1)2m\ a^{2m-1}}+(-1)^m\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}.$$

Si dans cette formule, on néglige l'intégrale définie du second membre, on obtient la formule d'approximation connue sous le nom de formule de Stirling. De l'examen du terme sommatoire $(-1)^m \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}$ qu'il faut ajouter au second membre de la formule de Stirling pour la rendre exacte, ou qui en d'autres termes, représente l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque du second membre, nous déduirons plusieurs conséquences remarquables. (*)

25. *Du nombre de termes qu'il faut prendre dans la série de Stirling, pour qu'en négligeant le terme sommatoire, l'erreur soit la moindre possible.*

L'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}\,dx$ étant positive de sa nature, nous ferons abstraction pour un instant du signe du terme sommatoire dont la valeur absolue sera par conséquent exprimée par $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}$, lorsque l'on prend m termes dans la valeur de $\tilde{\omega}(a)$. Si l'on avait pris un terme de moins, on aurait eu pour cette valeur absolue

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}.$$

Nous poserons

$$D = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}} - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}},$$

ou

$$D = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}\,dx.$$

(*) Mr Schaar est le premier qui ait ainsi donné la forme exacte du reste de la série de Stirling exprimé par une intégrale définie (mémoire déjà cité).

Or, remarquons que dans l'intégrale $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}dx$, si je remplace au dénominateur $1+x^2$ par $1+x$, ce changement a pour effet de diminuer la partie positive de l'intégrale, et d'augmenter au contraire la partie négative; on aura donc :

$$D > \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{1+x}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}dx,$$

d'où

$$D > \frac{1}{\pi}\int_0^\infty x^{2m-2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}dx - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty x^{2m-1}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}dx,$$

et par suite

$$D > \frac{\Gamma(2m-1)A_{2m}}{a^{2m-1}} - \frac{\Gamma(2m)A_{2m+1}}{a^{2m}},$$

$$D > \frac{\Gamma(2m-1)A_{2m+1}}{a^{2m-1}}\left(\frac{A_{2m}}{A_{2m+1}} - \frac{2m-1}{a}\right)$$

Or, $\frac{A_{2m}}{A_{2m+1}} > 2\pi$, on aura donc à fortiori

$$D > \frac{\Gamma(2m-1)A_{2m+1}}{a^{2m}}(2\pi a + 1 - 2m).$$

Et l'on voit que D sera posititif, si m n'est pas supérieur à $\pi a + \frac{1}{2}$.

On en tire immédiatement cette conséquence importante :

L'erreur est d'autant moindre que l'on prend un plus grand nombre de termes aussi longtemps que pour le terme auquel on s'arrête, on n'a pas $m > \pi a + \frac{1}{2}$.

Nous allons démontrer au contraire : *que l'erreur recommence à croître, et croît indéfiniment, dès que m atteint ou surpasse* $\pi a + 1 + \frac{\pi a}{2^{2\pi a-1}}$, *a étant plus grand que* 1.

Nous aurons comme précédemment

$$D = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}$$

$$D = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-3}(1-x^2)\,dx}{\frac{1}{x}+x}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}.$$

Or, remarquons que si dans la seconde de ces expressions, nous remplaçons au dénominateur $\frac{1}{x}+x$ par $1+x$, nous augmentons la partie positive de l'intégrale, tandis que nous diminuons la partie négative, nous aurons donc :

$$D < \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-3}}{1+x}(1-x^2)\,dx\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}.$$

D'où l'on déduit

$$D < \frac{\Gamma(2m-2)\,A_{2m-1}}{a^{2m-2}} - \frac{\Gamma(2m-1)\,A_{2m}}{a^{2m-1}},$$

$$D < \frac{\Gamma(2m-2)}{a^{2m-2}}A_{2m}\left(\frac{A_{2m-1}}{A_{2m}} - \frac{2m-2}{a}\right).$$

Or, reprenons les valeurs de A_{2m-1} et de A_{2m}, on a, m étant au moins égal à 2 :

$$\frac{(2\pi)^{2m-1}}{2}A_{2m-1} = 1 + \frac{1}{2^{2m-1}} + \frac{1}{3^{2m-1}} + \frac{1}{4^{2m-1}} + \cdots\cdots$$

$$< 1 + \frac{1}{2^{2m-2}} + \frac{1}{4^{2m-2}} + \cdots\cdots < 1 + \frac{1}{2^{2m-3}}.$$

D'où

$$A_{2m-1} < \left(1 + \frac{1}{2^{2m-3}}\right)\frac{2}{(2\pi)^{2m-1}}.$$

D'autre part

$$A_{2m} > \frac{2}{(2\pi)^{2m}}.$$

Donc

$$\frac{A_{2m-1}}{A_{2m}} < \pi\left(1 + \frac{1}{2^{2m-3}}\right),$$

nous aurons par conséquent à fortiori

$$D < \frac{\Gamma(2m-2)}{a^{2m-2}} A_{2m}\left(2\pi + \frac{2\pi}{2^{2m-3}} - \frac{2m-2}{a}\right).$$

Or, si nous supposons $m > \pi a + 1$, il est évident que l'on a :

$$\frac{2\pi}{2^{2m-3}} < \frac{2\pi}{2^{2\pi a-1}},$$

donc

$$D < \frac{\Gamma(2m-2)}{a^{2m-2}} A_{2m}\left(2\pi + \frac{2\pi}{2^{2\pi a-1}} - \frac{2m-2}{a}\right)$$

et il est visible que D sera négatif, dès que m sera égal ou supérieur à $\pi a + 1 + \frac{\pi a}{2^{2\pi a-1}}$, ce qui démontre la proposition que nous avons avancée.

Il résulte évidemment de ce que nous venons de dire que, a étant plus grand que 1, si $m \overline{\overline{<}} \pi a - \frac{1}{2}$, les trois intégrales

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}\,dx, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m+2}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}\,dx,$$

seront rangées par ordre de grandeur, la première plus grande que la seconde; et la seconde plus grande que la troisième :

Que si $m \overline{\overline{>}} \pi a + 1 + \frac{\pi a}{2^{2\pi a-1}}$, ces trois intégrales seront encore rangées par ordre de grandeur, mais dans un sens inverse, la première plus petite que la seconde, et la seconde plus petite que la troisième.

On en conclut que pour obtenir l'erreur minimum, il faut prendre pour m un des nombres entiers compris entre $\pi a - \frac{1}{2}$, et $\pi a + 1 + \frac{\pi a}{2^{2\pi a - 1}}$. S'il n'en tombe qu'un seul, ce sera la valeur de m qui donne l'erreur minimum. S'il en tombe deux, il y aura doute (*); et dans le doute, il sera plus avantageux de prendre le plus grand entier contenu dans $\pi a + \frac{1}{2}$.

26. *Des limites de l'erreur commise en arrêtant la série de Stirling à un certain terme.*

I. *L'erreur est moindre que le dernier terme que l'on conserve, et moindre encore que le terme qui aurait suivi celui auquel on s'arrête :*

On a :

$$\log \Gamma(1+a) = \frac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \frac{B_1}{1.2.a} - \frac{B_3}{3.4.a^3} \cdots\cdots$$

$$+ \frac{(-1)^{m-1} B_{2m-1}}{(2m-1)2ma^{2m-1}} + (-1)^m \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}.$$

Cette formule montre que le terme sommatoire est alternativement

(*) Dans son mémoire, Monsieur Schaar considérant l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2}\,dx \log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}$ comme une fonction continue de m, recherche la valeur de m qui rend cette intégrale un minimum, et il démontre rigoureusement que m est compris entre πa et $\pi a + 1$; il en tire la conclusion que pour obtenir l'erreur minimum, il faut prendre pour m le nombre entier compris entre πa et $\pi a + 1$. Cette conclusion ne me semble pas tout à fait rigoureuse, et je crois que tout ce que l'on peut conclure de cette manière, c'est que l'on obtiendra l'erreur minimum en prenant pour m un des nombres entiers compris entre $\pi a - 1$ et $\pi a + 2$. Si cette observation est exacte, la marche que j'ai suivie est plus complète, puisqu'elle ne laisse jamais de doute qu'entre deux valeurs de m, et que dans environ un tiers des cas, elle le détermine entièrement. La recherche du minimum de $\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}$ d'après la méthode de Mr Schaar est d'ailleurs intéressante, et je l'ai donnée dans la note deuxième, en poussant plus loin l'approximation pour la valeur supérieure de m.

positif et négatif, et toujours de signe contraire au terme qui le précède immédiatement. On a donc :

$$\log \Gamma(1+a) < \frac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \frac{B_1}{1.2.a},$$

$$\log \Gamma(1+a) > \frac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \frac{B_1}{1.2.a} - \frac{B_3}{3.4.a^3},$$

$$\log \Gamma(1+a) < \frac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \frac{B_1}{1.2.a} - \frac{B_3}{3.4.a^3} + \frac{B_5}{5.6.a^6},$$

et ainsi de suite. On peut en tirer immédiatement la conclusion que lorsqu'on s'arrête à un terme quelconque dans la suite du Stirling, la valeur absolue du reste que l'on néglige est inférieure soit au dernier terme que l'on conserve, soit au terme qui aurait immédiatement suivi celui auquel on s'arrête, ce qui du reste peut se déduire aussi des deux formules

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}$$

$$= \frac{B_{2m-1}}{(2m-1)2m.a^{2m-1}},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m+2}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}$$

$$= \frac{B_{2m+1}}{(2m+1)2m.a^{2m+1}},$$

que l'on tire sans peine d'une formule du N° 23.

II. *Si dans la série de Stirling, m n'est pas supérieur à* $\pi a + \frac{1}{2}$, *l'erreur est moindre que la moitié du terme auquel on s'arrête.*

En effet d'après ce que nous avons vu (25), on a dans ce cas :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}} > \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}.$$

D'où comme

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}$$

$$=\frac{B_{2m-1}}{(2m-1)\,2m.a^{2m-1}},$$

on aura :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}<\frac{1}{2}\,\frac{B_{2m-1}}{(2m-1)\,2m.a^{2m-1}},$$

ce qui contient le principe énoncé.

III. Il résulte de là que si m n'est pas supérieur à $\pi a-\frac{1}{2}$, l'erreur est moindre que la moitié du terme auquel on s'arrête, *mais de plus, je dis qu'elle est plus grande que la moitié du terme qui aurait suivi celui auquel on s'arrête.*

Car on aura alors

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}>\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m+2}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}.$$

Et comme

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m+2}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}$$

$$=\frac{B_{2m+1}}{(2m+1)(2m+2)a^{2m+1}},$$

il viendra

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}>\frac{1}{2}\,\frac{B_{2m+1}}{(2m+1)(2m+2)\,a^{2m+1}},$$

ce qui est le principe énoncé.

IV. On démontrerait de la même manière que *si l'on avait* $m \geqq \pi a+\frac{1}{2}+\frac{\pi a}{2^{2\pi a}-1}$ *l'erreur serait plus grande que la moitié du terme auquel on s'arrêterait et plus petite que la moitié du terme suivant.*

V. Des principes que nous venons de démontrer, il résulte que m étant plus petit que $\pi a + \frac{1}{2}$, si l'on prend d'une manière approximative

$$\log \Gamma(1 + a) = \frac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \frac{B_1}{1.2.a} - \frac{B_3}{3.4.a^3}\cdots\cdots$$
$$+ \frac{1}{2}\,\frac{(-1)^{m-2}B_{2m-3}}{(2m-3)(2m-2)\,a^{2m-3}},$$

ou bien

$$\log \Gamma(1+a) = \frac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \frac{B_1}{1.2.a}\cdots + \frac{(-1)^{m-2}B_{2m-3}}{(2m-3)(2m-2)a^{2m-3}}$$
$$+ \frac{1}{2}\,\frac{(-1)^{m-1}B_{2m-1}}{(2m-1)2m.a^{2m-1}}.$$

Le terme à ajouter pour rendre ces valeurs exactes aura toujours le même signe que celui du dernier terme. L'une de ces valeurs sera donc toujours plus grande et l'autre plus petite que la valeur véritable de $\log \Gamma(1 + a)$, et l'erreur sera dans les deux cas moindre que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{B_{2m-3}}{(2m-3)(2m-2)\,a^{2m-3}} - \frac{B_{2m-1}}{(2m-1)\,2m.a^{2m-1}}\right)$$

puisque c'est la différence entre ces deux valeurs de $\log \Gamma(1 + a)$ entre lesquelles se trouve la valeur véritable.

27. *Calcul numérique de l'erreur possible quand dans la formule de Stirling, on prend pour m le plus grand entier contenu dans $\pi a + \frac{1}{2}$.*

Reprenons l'intégrale $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1 + x^2}\log\frac{1}{1 - e^{-2\pi a x}}$ qui exprime le terme sommatoire de la série de Stirling, ou l'erreur commise en s'arrêtant à un terme de certain rang.

Appelons cette erreur E. Remarquons maintenant que si l'on représente par α une quantité qui peut varier entre 0 et 1, on a constamment pour toute valeur positive de x,

$$1 + x^2 > x^{2\alpha},$$

on en conclut

$$E < \frac{1}{\pi}\int_0^\infty x^{2m-2\alpha}\,dx \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi a x}},$$

d'où

$$E < \frac{\Gamma(2m + 1 - 2\alpha)}{a^{2m+1-2\alpha}} A_{2m+2-2\alpha}.$$

Nous prenons pour m le plus grand entier contenu dans $\pi a + \frac{1}{2}$, posons donc $m = \pi a - \frac{1}{2} + h$, h pouvant varier entre 0 et 1, et nous aurons :

$$E < \frac{\Gamma(2\pi a + 2h - 2\alpha)}{a^{2\pi a+2h-2\alpha}} A_{2\pi a+1+2h-2\alpha}.$$

Or, comme α est arbitraire, et contenu entre les mêmes limites que h, posons $\alpha = h$, il viendra

$$E < \frac{\Gamma(2\pi a)}{a^{2\pi a}} A_{2\pi a+1}.$$

Or on a (26, I) :

$$\log \Gamma(1 + a') < \frac{1}{2}\log 2\pi a' + a'(\log a' - 1) + \frac{1}{12a'}.$$

D'où

$$\log \Gamma(a') < \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(a' - \frac{1}{2}\right)\log a' - a' + \frac{1}{12a'},$$

et par conséquent

$$\log \Gamma(2\pi a) < \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(2\pi a - \frac{1}{2}\right)\log 2\pi a - 2\pi a + \frac{1}{24\pi a}.$$

Et passant des logarithmes aux nombres :

$$\Gamma(2\pi a) < \sqrt{2\pi}\,(2\pi a)^{2\pi a - \frac{1}{2}}\, e^{-2\pi a}\, e^{+\frac{1}{24\pi a}}.$$

D'autre part, on a, d'après les valeurs de $A_{2\pi a+1}$ et A_2,

$$\frac{A_{2\pi a+1}}{A_2} < \frac{1}{(2\pi)^{2\pi a-1}},$$

et comme

$$A_2 = \frac{1}{12}, \quad A_{2\pi a+1} < \frac{1}{12}\,\frac{1}{(2\pi)^{2\pi a-1}}.$$

A l'aide de ces formules, on trouve facilement

$$E < \frac{1}{6}\,\frac{\pi . e^{-2\pi a}\, e^{+\frac{1}{24\pi a}}}{a^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette expression se prête très facilement au calcul par logarithmes, et permet d'apprécier la plus grande approximation qui peut être obtenue pour une certaine valenr de a. Ainsi pour $a = 5$, on reconnaît aisément que $E < \left(\frac{1}{10}\right)^{14}$. Ainsi en prenant pour m le plus grand nombre entier contenu dans $\pi a + \frac{1}{2}$, c'est-à-dire le nombre 16, on est certain d'avoir les log de $\Gamma(a)$, à partir de $a = 5$ avec quatorze décimales exactes. Pour $a = 10$, on verrait que $E < \left(\frac{1}{10}\right)^{28}$, on n'aurait donc point d'erreur portant sur la vingt-huitième décimale, en prenant $m = 31$.

D'après cela, il est visible que la formule de Stirling, quoique non convergente, peut servir à calculer le $\log \Gamma(a)$, quel que soit a, avec tel degré d'approximation qu'on le désirera : car il suffira de calculer $\log \Gamma(a + n)$, n étant assez grand pour pouvoir obtenir l'approximation demandée. $\log \Gamma(a + n)$ étant obtenu, on en déduira sans difficulté $\log \Gamma(a)$, d'après la première propriété des fonctions Γ.

§ 2. De quelques formules qui donnent un développement de log $\Gamma(1+a)$ en série convergente.

I. 28. Reprenons la formule

$$\log \Gamma(1+a) = \frac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \tilde{\omega}(a)$$

$$\tilde{\omega}(a) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-ax}}{x},$$

et mettons $\tilde{\omega}(a)$ sous la forme suivante :

$$\tilde{\omega}(a) = \int_0^\infty \frac{1 - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)(e^x - 1)}{x}\frac{e^{-ax}}{e^x - 1} = \int_0^\infty \frac{1 - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)(e^x - 1)}{x}\frac{e^{-(a+1)x}}{1 - e^{-x}}.$$

Or, en partant de la formule

$$\int_0^\infty \frac{1 - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)(e^x - 1)}{x} e^{-(k+1)x} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) - 1,$$

on obtient facilement, n étant un nombre entier,

$$\int_0^\infty \frac{1 - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)(e^x - 1)}{x}\frac{e^{-(a+1)x}}{1 - e^{-x}}(1 - e^{-nx})\, dx$$

$$= \sum_{r=0}^{r=n-1}\left(a + r + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{a+r}\right) - 1.$$

Et nous pourrons faire converger n vers l'infini, si les deux membres convergent tous deux vers une limite finie et déterminée. Or, le premier membre converge vers $\tilde{\omega}(a)$ comme il est facile de le faire voir. Quand au second, il faudra faire voir que la série

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} \left(a+r+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{a+r}\right)-1,$$

est convergente. Or, on y parvient très facilement, car on a

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} \left(a+r+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{a+r}\right)-1$$

$$=\left(a+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{a}\right)-1+\sum_{r=1}^{r=\infty}\left(a+r+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{a+r}\right)-1.$$

Or, si l'on remarque que dans le second membre, $\frac{1}{a+r}$ est toujours plus petit que l'unité, on aura

$$\log\left(1+\frac{1}{a+r}\right)<\frac{1}{a+r}-\frac{1}{2.(a+r)^2}+\frac{1}{3.(a+r)^3},$$

et par suite

$$\left(a+r+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{a+r}\right)-1<\frac{1}{3.4(a+r)^2}+\frac{1}{6.(a+r)^3},$$

d'où

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\left(a+r+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{a+r}\right)-1<\frac{1}{3.4}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{(a+r)^2}$$

$$+\frac{1}{6}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{(a+r)^3}.$$

Or,

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{(a+r)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{(a+r)^3}$$

étant tous les deux convergents pour toute valeur positive de a,

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\left(a+r+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{a+r}\right)-1$$

le sera, et par conséquent

$$\sum_{r=0}^{r=\infty}\left(a+r+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{a+r}\right)-1,$$

on aura donc rigoureusement pour toute valeur positive de a plus grande que 0

$$\tilde{\omega}(a)=\sum_{r=0}^{r=\infty}\left\{\left(a+r+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{a+r}\right)-1.\right\}$$

Et par conséquent

$$\log\Gamma(1+a)=\frac{1}{2}\log 2\pi a+a(\log a-1)$$
$$+\sum_{r=0}^{r=\infty}\left\{\left(a+r+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{a+r}\right)-1.\right\}\ (*)$$

II. 29. De cette formule, on en déduit une autre qui procède suivant un nombre infini de séries infinies. Supposons d'abord que a soit plus grand que 1, en remarquant que pour toute valeur de r depuis 0 jusqu'à l'infini

$$\left(a+r+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{a+r}\right)-1$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3}\frac{1}{(a+r)^2}-\frac{2}{3.4}\frac{1}{(a+r)^3}+\frac{3}{4.5}\frac{1}{(a+r)^4}\cdots\cdots\right).$$

(*) Cette formule est démontrée pour $a>1$, *Journal de Crelle*, tome 29, dans une note de Mr GUDERMANN.

on aura pour toute valeur de a supérieure à l'unité

$$\tilde{\omega}(a) = +\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2.3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+2)^2}+\cdots\cdots\right)$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3.4}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{(a+1)^3}+\frac{1}{(a+2)^3}+\cdots\cdots\right)$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4.5}\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{(a+1)^4}+\frac{1}{(a+2)^4}\cdots\cdots\cdots\right)$$

$$-\text{ etc.}\ldots.$$

D'où on déduira la valeur de $\log \Gamma(1+a)$

$$\log \Gamma(1+a) = \frac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2.3}\sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{1}{(a+r)^2}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{2}{3.4}\sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{1}{(a+r)^3}+\cdots\cdots \text{ etc.}$$

Série dont la convergence est certaine pour $a > 1$, puisqu'elle n'est qu'une déduction rigoureuse de la formule démontrée plus haut.

Si a était plus petit que 1, au lieu de développer, comme nous l'avons fait

$$\sum_{r=0}^{r=\infty}\left\{\left(a+r+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{a+r}\right)-1\right\},$$

on ne développera que

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\left(a+r+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{a+r}\right)$$

et l'on aura

$$\log \Gamma(1+a) = \frac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \left(a+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{a}\right) - 1$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{1}{2.3}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{(a+r)^2}-\frac{1}{2}\,\frac{2}{3.4}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{(a+r)^3}+\text{ etc}\cdots$$

série dont la convergence est certaine pour toute valeur positive de a.

III. 30. Puisque l'on a rigoureusement

$$\tilde{\omega}(a) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \left\{ \left(a + r + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{a+r}\right) - 1 \right\}$$

et que

$$\int_0^\infty \frac{1 - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)(e^x - 1)}{x} e^{-(a+r+1)x} dx = \left(a + r - \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{a+r}\right) - 1,$$

on aura

$$\tilde{\omega}(a) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \int_0^\infty \frac{1 - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)(e^x - 1)}{x} e^{-(a+r+1)x} dx.$$

Or, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{1 - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)(e^x - 1)}{x} e^{-(a+r+1)x} dx$$

s'obtient très facilement développée en série : en effet, en partant de la formule

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} \cdots\cdots$$

on obtient

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)(e^x - 1)}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1.2.3} + \frac{2x^2}{1.2.3.4} + \frac{3x^3}{1.2.3.4.5} + \cdots \text{ etc.}\right)$$

vraie pour toute valeur finie de x, d'où

$$\int_0^n \frac{1 - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)(e^x - 1)}{x} e^{-(a+r+1)x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^n \frac{x e^{-(a+r+1)x} dx}{1.2.3} + \frac{2}{1.2.3.4}\int_0^n x^2 e^{-(a+r+1)x} dx + \cdots\cdots\right)$$

et l'on pourra poser $n=\infty$, si le second membre demeure convergent, or on a

$$\int_0^\infty x^n e^{-(a+r+1)x}\,dx=\frac{\Gamma(n+1)}{(a+r+1)^{n+1}}=\frac{1.2.3....n}{(a+r+1)^{n+1}}.$$

Il viendra donc

$$\int_0^\infty \frac{-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)(e^x-1)}{x}e^{-(a+r+1)x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3}\,\frac{1}{(a+r+1)^2}+\frac{2}{3.4}\,\frac{1}{(a+r+1)^3}+\dots\right)$$

la convergence de la série du second membre étant évidente pour toute valeur positive de a. On en tirera :

$$\varpi(a)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3}\sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{1}{(a+r+1)^2}+\frac{2}{3.4}\sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{1}{(a+r+1)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{4.5}\sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{1}{(a+r+1)^4}+\dots\right)$$

et par conséquent

$$\log\Gamma(1+a)=\frac{1}{2}\log 2\pi a+a(\log a-1)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3}\sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{1}{(a+r+1)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3.4}\sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{1}{(a+r+1)^3}+\dots\text{ etc.}\right)$$

convergente pour toute valeur positive de a (*).

(*) Cette formule a été donnée par Mr Binet dans son *Mémoire sur les intégrales Eulériennes* (*Journal de l'école polytechnique*, tome XVI).

IV. 31. Dans la valeur de $\tilde{\omega}(a)$, posons $(1-e^{-x})=y$, on aura facilement

$$\tilde{\omega}(a)=\int_0^1\left(-\frac{1}{y}+\frac{1}{2}-\frac{1}{l(1-y)}\right)\frac{(1-y)^{a-1}}{l(1-y)}\,dy.$$

Représentons par β_m la valeur du coefficient

$$\frac{\beta(1-\beta)(2-\beta)\cdots\cdots(m-1-\beta)}{1.2.3.\ldots..m},$$

nous aurons pour toute valeur de y inférieure à l'unité

$$(1-y)^\beta=1-\beta_1 y-\beta_2 y^2-\beta_3 y^3\ldots\ldots\text{ etc.},$$

multiplions par $d\beta$, et intégrons par rapport à β, depuis 0 jusqu'à β, nous aurons

$$\frac{(1-y)^\beta-1}{l(1-y)}=\beta-y\int_0^\beta\beta_1 d\beta-y^2\int_0^\beta\beta_2 d\beta-y^3\int_0^\beta\beta_3 d\beta\ldots\ldots\text{etc.}$$

multiplions celle-ci de nouveau par $d\beta$, et intégrons entre 0 et β; il viendra

$$\frac{1}{l(1-y)}\left\{\frac{(1-y)^\beta-1}{l(1-y)}-\beta\right\}=\frac{\beta^2}{2}-y\int_0^\beta d\beta\int_0^\beta\beta_1 d\beta-y^2\int_0^\beta d\beta\int_0^\beta\beta_2 d\beta\ldots\text{etc.}$$

Ces deux formules, nous donnent pour $\beta=1$.

$$\frac{1}{l(1-y)}=-\frac{1}{y}+\int_0^1\beta_1 d\beta+y\int_0^1\beta_2 d\beta+y^2\int_0^1\beta_3 d\beta\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{l(1-y)}\left[\frac{1}{l(1-y)}+\frac{1}{y}\right]=-\frac{1}{2y}+\int_0^1 d\beta\int_0^\beta\beta_1\,d\beta+y\int_0^1 d\beta\int_0^\beta\beta_2\,d\beta\ldots\ldots$$

qui combinées ensemble donneront facilement pour $0<y<1$,

$$\frac{1}{l(1-y)}\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{l(1-y)}+\frac{1}{y}\right]=b_0+b_1 y+b_2 y^2+\cdots\cdots$$

En posant

$$b_m = \int_0^1 d\beta \int_0^\beta \beta_{m+1}\, d\beta - \frac{1}{2}\int_0^1 \beta_{m+1}\, d\beta.$$

Avant d'aller plus loin, faisons remarquer que puisque d'après la valeur générale de β_{m+1}, l'on a

$$\beta_{m+1} = \frac{\beta(1-\beta)\ldots\ldots(m-\beta)}{1.2\ldots\ldots m+1},$$

β_{m+1} est donc constamment positif, aussi longtemps que β est compris entre 0 et 1, de plus β étant compris dans ces limites, β_{m+1} reste inférieur à $\frac{1}{m+1}$; si donc vous représentez par k et k_1 des quantités comprises entre 0 et 1, vous aurez

$$\int_0^1 d\beta \int_0^\beta \beta_{m+1}\, d\beta = \frac{k}{m+1}\int_0^1 \beta d\beta = \frac{1}{2}\,\frac{k}{m+1},$$

et

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \beta_{m+1}\, d\beta = \frac{1}{2}\,\frac{k_1}{m+1},$$

par suite

$$b_m = \frac{1}{2}\,\frac{1}{m+1}(k-k_1),$$

on en conclut que la valeur numérique de b_m reste toujours inférieure à $\frac{1}{2}\frac{1}{m+1}$. On pourrait démontrer que b_m est toujours positif, dès que $m=2$, mais cela est inutile pour l'objet que nous avons en vue.

La valeur de b_m peut du reste se mettre facilement sous la forme d'une intégrale définie simple, en remarquant que

$$\int_0^1 d\beta \int_0^\beta \beta_{m+1}\, d\beta = \int_0^1 \beta_{m+1}\, d\beta - \int_0^1 \beta.\beta_{m+1}\, d\beta.$$

D'où l'on déduit

$$b_m = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \beta_{m+1}\, d\beta.$$

On trouve du reste très facilement pour les premiers de ces coëfficients

$$b_0 = -\frac{1}{12}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{1}{2.3}\,\frac{1}{120}, \quad b_3 = \frac{1}{2.3.4}\,\frac{1}{30}.$$

Ceci posé, on a rigoureusement : pour $0 < y < 1$,

$$\frac{1}{l(1-y)}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{l(1-y)} - \frac{1}{y}\right\} = \frac{1}{12} - b_2\, y^2 - b_3\, y^3 - b_4\, y^4 \ldots\ldots$$

et par suite pour ces mêmes valeurs.

$$\frac{1}{l(1-y)}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{l(1-y)} - \frac{1}{y}\right\}(1-y)^{a-1}$$

$$= \left\{\frac{1}{12} - b_2\, y^2 - b_3\, y^3 - b_4\, y^4 \ldots\ldots\right\}(1-y)^{a-1},$$

et l'on en conclut; ε étant une petite quantité

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{1}{l(1-y)}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{l(1-y)} - \frac{1}{y}\right\}(1-y)^{a-1}\, dy$$

$$= \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left\{\frac{1}{12} - b_2\, y^2 - b_3\, y^3 - b_4\, y^4 \ldots\ldots\right\}(1-y)^{a-1}\, dy.$$

Et l'on pourra poser $\varepsilon = 0$, si les deux membres convergent tous deux vers une limite finie et déterminée. Or il n'y a pas de doute quant au premier qui converge vers $\tilde{\omega}\,(a)$; quant au second il faut

prouver que si l'on pose $z = 0$, la série obtenue est convergente. On aura donc rigoureusement,

$$\varpi(a) = \frac{1}{12}\int_0^1 (1-y)^{a-1} - b_2 \int_0^1 y^2 (1-y)^{a-1}$$

$$- b_3 \int_0^1 y^3 (1-y)^{a-1} - b_4 \int_0^1 y^4 (1-y)^{a-1} \ldots\ldots$$

d'où (N° 10),

$$\varpi(a) = \frac{1}{12a} - b_2 \frac{\Gamma(3)\Gamma(a)}{\Gamma(3+a)} - b_3 \frac{\Gamma(4)\Gamma(a)}{\Gamma(4+a)} - b_4 \frac{\Gamma(5)\Gamma(a)}{\Gamma(5+a)} \ldots\ldots$$

si la série du second membre est convergente pour toute valeur positive de a.

Or, nous parviendrons facilement à le démontrer en remarquant que l'on a d'après la formule de Stirling,

$$\Gamma(m+1) < \sqrt{2\pi}\,(m+1)^{m+\frac{1}{2}}\, e^{-(m+1)}\, e^{\frac{1}{24(m+1)}},$$

$$\Gamma(m+1+a) > \sqrt{2\pi}\,(m+1+a)^{m+\frac{1}{2}+a}\, e^{-(m+1+a)}.$$

D'où l'on tire par la division

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1+a)} < \left(\frac{m+1}{m+1+a}\right)^{m+\frac{1}{2}} \frac{1}{(m+1+a)^a}\, e^a\, e^{\frac{1}{24(m+1)}}.$$

Comme l'on a constamment quelle que soit la valeur positive de a et de m,

$$\left(\frac{m+1}{m+1+a}\right)^{m+\frac{1}{2}} < 1, \quad \text{et} \quad e^{\frac{1}{24(m+1)}} < e^{\frac{1}{24}},$$

de plus que la valeur numérique de b_m est constamment inférieure à $\frac{1}{m+1}$,

il viendra en n'ayant égard qu'aux valeurs absolues

$$b_m \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(a)}{\Gamma(m+1+a)} < \Gamma(a)e^a e^{\frac{1}{24}} \frac{1}{(m+1+a)^a} \frac{1}{(m+1)} < \Gamma(a)e^a e^{\frac{1}{24}} \frac{1}{(m+1)^{a+1}}.$$

D'où

$$\sum_{m=2}^{m=\infty} b_m \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(a)}{\Gamma(m+1+a)} < \Gamma(a)e^a e^{\frac{1}{24}} \sum_{m=2}^{m=\infty} \frac{1}{(m+1)^{a+1}}.$$

Or, la série

$$\sum_{m=2}^{m=\infty} \frac{1}{(m+1)^{a+1}}$$

est toujours convergente si $a > 0$, donc la convergence du second membre est démontrée, et l'on a rigoureusement pour toute valeur positive de a

$$\tilde{\omega}(a) = \frac{1}{12a} - b_2 \frac{\Gamma(3)\Gamma(a)}{\Gamma(3+a)} - b_3 \frac{\Gamma(4)\Gamma(a)}{\Gamma(4+a)} \ldots\ldots \text{etc.}$$

La première propriété de la fonction Γ, donnant facilement

$$\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(a)}{\Gamma(m+1+a)} = \frac{1.2.3\ldots\ldots m}{a(a+1)\ldots\ldots(a+m)},$$

on aura

$$\tilde{\omega}(a) = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{12} - b_2 \frac{1.2}{(a+1)(a+2)} - b_3 \frac{1.2.3}{(a+1)(a+2)(a+3)} \ldots\ldots\right]$$

Et par conséqnent :

$$\log \Gamma(1+a) = \frac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \frac{1}{a}\left[\frac{1}{12} - \frac{1.2}{(a+1)(a+2)} b_2 \right.$$

$$\left. - \frac{1.2.3}{(a+1)(a+2)(a+3)} b_3 \ldots\ldots\right]$$

qui est rigoureuse pour toute valeur positive de a.

9

Cette formule remarquable a été donnée par M. Binet dans son mémoire sur les intégrales Eulériennes; elle y est démontrée pour $a > 1$, M. Cauchy à qui cette démonstration est empruntée (*) ne s'est pas occupé de la convergence de la série à laquelle on arrive.

V. 32. Toutes les formules précédentes ont été uniformément déduites de la valeur de $\tilde{\omega}(a)$. Leur convergence était d'autant plus rapide que a était plus grand, nous allons au contraire en partant de la formule

$$\frac{d \log \Gamma(1+a)}{dx} = -C + \int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{e^x - 1} dx, \qquad (15,\ 2°)$$

trouver une série procédant suivant les puissances croissantes de a, et dont la convergence sera limitée au cas de $a < 1$. En s'aidant de la formule

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \ldots\ldots, \quad x > 0,$$

on démontre que

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{a+2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{a+3} \ldots,$$

la convergence de la série du second membre se voyant immédiatement en remarquant que

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{a+r} = \frac{a}{r(a+r)} < \frac{a}{r^2}.$$

Il en résulte que

$$\frac{d \log \Gamma(1+a)}{da} = -C + \sum_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a+r}\right),$$

d'où l'on tire en dérivant plusieurs fois par rapport à a

(*) *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, tome II.

$$\frac{d^n \log \Gamma(1+a)}{da^n} = (-1)^n (1.2.3\ldots\ldots n-1) \sum_{r=1}^{r=\infty} \left[\frac{1}{(a+r)^n}\right],$$

n étant un nombre entier au moins égal à 2.

Or, on a d'après la formule de Taylor :

$$F(1+a) = F(1) + \frac{F'(1)}{1} a + \frac{F''(1)}{1.2} a^2 + \frac{F'''(1)}{1.2.3} a^3 + \ldots\ldots$$

Si l'on pose $F(1+a) = \log \Gamma(1+a)$, en remarquant que $\log \Gamma(1) = 0$, les formules précédentes donneront

$$\log \Gamma(1+a) = -Ca + \frac{1}{2} S_2 a^2 - \frac{1}{3} S_3 a^3 + \frac{1}{4} S_4 a^4 \ldots\ldots$$

où

$$S_n = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r^n}.$$

La série du second membre sera convergente pour toute valeur de a inférieure à l'unité, en valeur absolue, et par conséquent pour $-1 < a < +1$. On peut lui donner une forme qui rendra la convergence plus rapide, en remarquant que a étant compris entre ces mêmes limites, on a

$$\log(1+a) = a - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{3} a^3 \ldots\ldots$$

ce qui nous donnera

$$\log \Gamma(1+a) = -\log(1+a) + (1-C)a + \frac{1}{2}(S_2 - 1) a^2 + \frac{1}{3}(S_3 - 1) a^3 \ldots\ldots$$

Cette formule nous donne $\log \Gamma(1+x)$ en logarithmes népériens; pour l'avoir en logarithmes vulgaires, il faudrait multiplier tous les termes du second membre à l'exception de $\log(1+a)$ par

$$\mu = 0,\ 434\ 19448190\ldots\ldots$$

Posons donc immédiatement

$$\mu(1 - C) = S'_1, \quad \frac{\mu}{2}(S_2 - 1) = S'_2 \ldots\ldots \quad \frac{\mu}{3}(S_3 - 1) = S'_3 \ldots\ldots$$

et en général pour des valeurs entières de n plus grandes que l'unité

$$\frac{\mu}{n}(S_n - 1) = S'_n,$$

nous aurons

$$(\alpha) \quad \text{Log}\,\Gamma(1 + a) = - \text{Log}\,(1 + a) + S'a + S'_2 a^2 - S'_3 a^3 + S'_4 a^4 \ldots\ldots$$

En se rappelant la deuxième propriété des fonctions Γ, on arrivera facilement à donner à cette formule la forme suivante

$$(\beta) \quad \text{Log}\,\Gamma(1 + a) = \frac{1}{2}\text{Log}\frac{\pi a}{\sin \pi a} - \frac{1}{2}\text{Log}\frac{1 + a}{1 - a} + S'a - S'_3 a^3 - S'_5 a^5 \ldots\ldots$$

On trouvera dans Legendre (*Exercices de calcul intégral,* tome II), une table de ces coefficients S'_n et de leurs logarithmes jusqu'à S'_{15} (*). L'emploi de la formule (β) sera en général plus avantageux que celui de la formule (α), excepté dans le cas où a ayant une valeur extrêmement petite, les tables de sinus ne donneraient point Log $\frac{\pi a}{\sin \pi a}$ avec un degré d'approximation suffisante.

(*) Ces coefficients y sont désignés par B_n. Nous les désignons par S'_n pour ne pas confondre cette notation avec celle des nombres Bernouilliens.

DES TABLES DE LA FONCTION Γ.

33. *Construction des tables.* — Nous avons dit (11) que la connaissance de la fonction Γ dans une période, c'est-à-dire, entre deux nombres entiers consécutifs équivalait à la connaissance entière de la fonction. On conçoit qu'à l'aide de l'une des nombreuses formules que nous avons données pour le calcul approximatif de $\log \Gamma(a)$, on ait pu déterminer successivement les logarithmes népériens ou les logarithmes vulgaires de $\Gamma(k + n\omega)$, k ayant une valeur entière quelconque, ω étant une fraction ayant l'unité pour numérateur, et n un nombre entier qui prendra toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à $\frac{1}{\omega}$. On aura ainsi une table de la fonction Γ. Nous supposerons que l'on se serve de la table qui se trouve dans le 2e volume des *Exercices de calcul intégral* de Legendre. Pour ces tables $k = 1$, et $\omega = 0{,}001$, de telle sorte que les tables donnent les logarithmes vulgaires de la fonction $\Gamma(a)$, de millième en millième depuis $a = 1$ jusqu'à $a = 2$. Legendre a choisi cette période de préférence à toute autre, parce que le minimum de la fonction Γ, s'y trouve compris. Quant au calcul, il s'est servi des formules (α) et (β), (32), pour déterminer $\operatorname{Log} \Gamma\left(1 + \frac{n}{1000}\right)$, depuis $n = 0$ jusqu'à $n = 250$; puis en combinant convenablement l'équation des compléments (12) pour $n = 1$, et l'équation de Gauss (16) pour $n = 2$, c'est-à-dire les deux formules

$$\Gamma(1 + a)\Gamma(2 - a) = a(1 - a)\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}\, 2^{\frac{1}{2} - 2a}\, \Gamma(2a),$$

il est parvenu à déterminer $\operatorname{Log} \Gamma\left(1 + \frac{n}{1000}\right)$, depuis $n = 250$, jusqu'à $n = 1000$, à l'aide des valeurs déjà obtenues, et la table était construite. La table de Legendre est à douze décimales, et contient les différences premières, secondes et troisièmes. Quant au signe

des différences, les différences secondes sont toujours positives, les différences troisièmes toujours négatives; les différences premières sont négatives jusqu'à $a = 1,461$. Elles sont positives depuis $a = 1,462$. Voici un extrait de la table :

a	Log $\Gamma(a)$	Diff. I.	Diff. II.	Diff. III.
1,865	$\bar{1}$,977 839 678 473	144 260 561	305 703	208
1,866	$\bar{1}$,977 983 939 034	144 566 264	305 495	209
1,867	$\bar{1}$,978 128 505 298	144 871 759	305 286	208
1,868	$\bar{1}$,978 273 377 057	145 177 045	305 078	206
1,869	$\bar{1}$,978 418 554 102	145 482 123	304 872	205

Voici maintenant comment on se sert des tables pour résoudre les deux problèmes.

On donne a, trouver Log $\Gamma(a)$.

On donne Log $\Gamma(a)$, trouver a.

34. 1er *Problème*. On donne a, trouver Log $\Gamma(a)$.

1° Si a est compris entre 1 et 2, et est exactement un des nombres de la table, on trouvera à côté Log $\Gamma(a)$.

2° Si a est compris entre 1 et 2, et est compris entre 2 des valeurs de l'argument inscrites dans la table, posons

$$a = a' + \omega\alpha,$$

$\omega = 0,001$, a' représente la valeur immédiatement moindre que a, qui se trouve dans la table, $0 < \alpha < 1$; on a d'après une formule connue

$$f(a' + \omega\alpha) = f(a') + \alpha\Delta f(a) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\Delta^2 f(a) + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}\Delta^3 f(a)\ldots$$

Les différences $\Delta f(a)$, $\Delta^2 f(a)$,..... étant celles qui correspondent à des accroissements ω donnés à a', on aura donc

$$\text{Log}\,\Gamma(a' + \omega\alpha) = \text{Log}\,\Gamma(a') + \alpha\Delta\,\text{Log}\,\Gamma(a') + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\Delta^2\,\text{Log}\,\Gamma(a') + \cdots\cdot$$

D'où en représentant Log $\Gamma(a)$ par A, et Log $\Gamma(a')$ par A', on a

$$A = A' + \alpha \Delta A' + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\Delta^2 A' + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}\Delta^3 A' \ldots\ldots$$

on peut négliger les termes suivants comme n'exerçant point d'influence sur la douzième décimale. A l'aide de cette formule, on calculera A de la manière suivante : on aura

$$A = A' + \alpha\left[\Delta A' + \frac{\alpha-2}{2}\left(\Delta^2 A' + \frac{\alpha-2}{3}\Delta^3 A'\right)\right].$$

On calculera d'abord $\Delta^2 A' + \frac{\alpha-2}{3}\Delta^3 A'$, qu'on représentera par A'_2, puis $\Delta_1 A' + \frac{\alpha-1}{2} A'_2$ qu'on représentera par A'_1 et enfin on aura

$$A = A' + \alpha A'_1.$$

Exemple. — Trouver la valeur de $A = \log \Gamma(1,8663201)$. On a d'après la table

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} \Gamma(1,866) = A' &= \bar{1},977\ 983\ 939\ 034, \\ \Delta A' &= 144\ 566\ 264, \\ \Delta^2 A' &= 305\ 495, \\ \Delta^3 A' &= -\ 209, \end{aligned}$$

on aura donc

$$A'_2 = \Delta^2 A' + \frac{\alpha-2}{3}\Delta^3 A' = 305\ 612,$$

$$A'_1 = \Delta A + \frac{\alpha-1}{2} A'_2 = 144\ 462\ 371,$$

$$A = A' + \alpha A'_1 = \bar{1},978\ 030\ 181\ 429.$$

3° Si a n'était pas compris entre les limites des tables, quoique restant positif, on ramènerait facilement le cas à la question précédente à l'aide de la première propriété de la fonction Γ.

Exemple. — On demande de trouver $A = \operatorname{Log} \Gamma(4,8663201)$.

On aura

$$A = \text{Log}\,(3{,}8663201) + \text{Log}\,(2{,}8663201) + \text{Log}\,(1{,}8663201)$$
$$+ \text{Log}\,\Gamma(1{,}8663201).$$

De même on trouverait

$$A = \text{Log}\,(0{,}8663201)$$

par la formule

$$A = \text{Log}\,\Gamma(1{,}8663201) - \text{Log}\,(0{,}8663201).$$

4° Si a était négatif, on commencerait par calculer $\Gamma(1-a)$, et on tirerait de là, la valeur de $\Gamma(a)$ par la formule connue

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

à laquelle on peut appliquer le calcul logarithmique si le second membre est positif. S'il était négatif, on poserait

$$[-\Gamma(a)]\,\Gamma(1-a) = -\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

et on pourrait déterminer par logarithmes $-\Gamma(a)$ et par conséquent $\Gamma(a)$.

35. 2me *Problème.* On donne $\Gamma(a)$, trouver a.

Les valeurs négatives de a qui satisfont à une valeur donnée de $\Gamma(a)$, étant en nombre infini, nous ne nous occuperons que des valeurs positives; en d'autres termes nous restreindrons le problème à chercher les valeurs de a qui donnent à l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\,dx$ une valeur proposée. Or, puisque la fonction $\Gamma(a)$ augmente indéfiniment pour des valeurs positives de a, de part et d'autre du point où elle est un minimum, il s'ensuit que pour toute valeur de $\text{Log}\,\Gamma(a)$ plus grande que la valeur minimum il y aura toujours deux valeurs réelles de la racine a.

Il n'y en a point, lorsque la valeur donnée est inférieure à la valeur minimum. Ce minimum a été d'ailleurs calculé très exactement par Legendre qui a trouvé

$$\log \Gamma(a) = \bar{1},947\ 239\ 174\ 393,$$

pour

$$a = 1,461\ 632\ 145\ 105.$$

Nous désignerons les deux racines cherchées par a_1 et par a_2.

En faisant abstraction de la valeur $\text{Log}\,\Gamma(a) = 0$, qui répond à $a_1 = 1$, et $a_2 = 2$, nous distinguerons deux cas :

1° $\text{Log}\,\Gamma(a)$ est négatif. Les deux racines sont comprises entre 1 et 2, l'une plus petite et l'autre plus grande que 1,461632.....

Pour trouver la 1re, cherchez dans la table au-dessous de $a = 1,462$ deux valenrs de l argument qui donnent pour $\text{Log}\,\Gamma(a)$ des valeurs entre lesquelles se trouve comprise la valeur donnée. Soit a' la plus petite de ces deux valeurs. Posons $\text{Log}\,\Gamma(a') = A'$ et $a_1 = a' + \omega\alpha$. Appelons A la valeur de $\text{Log}\,\Gamma(a)$ proposée, et déterminez δ, à l'aide de la relation

$$A = A' + \delta,$$

on calculera aisément α à l'aide des deux opérations suivantes.

On a

$$\delta = \alpha\left[\Delta A' + \frac{\alpha - 1}{2}\left(\Delta^2 A' + \frac{\alpha - 2}{3}\Delta^3 A'\right)\right].$$

Commencez par négliger dans δ,$\Delta A'$ et $\Delta^2 A'$ les quatre derniers chiffres, l'équation à résoudre deviendra

$$\alpha = \frac{\delta}{\Delta A' + \frac{\alpha - 1}{2}\Delta^2 A'}.$$

En négligeant d'abord le petit terme $\frac{\alpha - 1}{2}\Delta^2 A'$, on aura une première valeur approchée de α, et en tenant compte ensuite, on déterminera une valeur de α qui sera exacte jusqu'à la quatrième décimale. Appelons α' cette valeur, et z la correction qu'il faut lui appliquer, en sorte que l'on ait $\alpha = \alpha' + z$, calculez δ' par la formule

$$\delta' = \alpha'\left[\Delta A' + \frac{\alpha' - 1}{2}\left(\Delta^2 A' + \frac{\alpha' - 2}{3}\Delta^3 A'\right)\right],$$

vous aurez

$$z = \frac{\delta - \delta'}{\Delta A' + \left(\alpha' - \frac{1}{2}\right) \Delta^2 A'},$$

valeur dans laquelle il ne faudra pas conserver plus de chiffres décimaux qu'il n'y en a au numérateur. La racine cherchée sera $a_1 = a' + \omega(\alpha' + z)$.

On trouverait a_2 exactement de la même manière, en cherchant au delà de la valeur 1,461 de l'argument, deux valeurs qui comprennent la valeur proposée.

2° $\operatorname{Log} \Gamma(a)$ est positif, a_1 est compris entre 0 et 1, a_2 est plus grand que 2. Pour déterminer a_1 par exemple, opérez par tâtonnements et en vous aidant de la première propriété de la fonction Γ, jusqu'à ce que vous ayez trouvé deux valeurs de a distantes de un millième qui donnent pour $\operatorname{Log} \Gamma(a)$ des valeurs comprenant celle qui est proposée. Nommez a' la première de ces valeurs, calculez $\operatorname{Log} \Gamma(a')$, $\operatorname{Log} \Gamma(a' + \omega)$, $\operatorname{Log} \Gamma(a' + 2\omega)$, $\operatorname{Log} \Gamma(a' + 3\omega)$, de manière à pouvoir déterminer $\Delta A'$, $\Delta^2 A'$, $\Delta^3 A'$, et opérez ensuite exactement comme dans le cas précédent. De même pour trouver la seconde racine (*).

Nous proposerons pour exemple de rechercher la seconde valeur de a qui donne $\Gamma(a) = \sqrt{\pi}$. On sait que la première de ces valeurs est $a_1 = \frac{1}{2}$.

Ainsi on a $\operatorname{Log} \Gamma(a) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \pi = 0{,}248\ 574\ 936\ 347.....$

Après quelques tâtonnements, on trouve que a est compris entre 2,865 et 2,866. Nous aurons alors :

$$A' \text{ ou } \operatorname{Log} \Gamma(2{,}865) = \operatorname{Log} \Gamma(1{,}865) + \operatorname{Log}(1{,}865) = 0{,}248\ 518\ 514\ 618.$$

$$\operatorname{Log} \Gamma(2{,}866) = \operatorname{Log} \Gamma(1{,}866) + \operatorname{Log}(1{,}866) = 0{,}248\ 895\ 578\ 444.$$

$$\operatorname{Log} \Gamma(2{,}867) = \operatorname{Log} \Gamma(1{,}867) + \operatorname{Log}(1{,}867) = 0{,}249\ 272\ 823\ 247.$$

$$\operatorname{Log} \Gamma(2{,}868) = \operatorname{Log} \Gamma(1{,}868) + \operatorname{Log}(1{,}868) = 0{,}249\ 650\ 248\ 951.$$

(*) Ces détails sont extraits du tome II des *Exercices de calcul intégral de* Legendre.

Calculant les différences, on a

$$\Delta A' = 377063826 \quad \Delta^2 A' = 180977 \quad \Delta^3 A' = -76$$

et

$$\delta = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\pi - \operatorname{Log}\Gamma(2,865) = 56421729.$$

Posant $a_2 = 1,865 + \omega\alpha$, une première valeur approximative de α sera fournie par

$$a = \frac{5642}{37706 + \frac{\alpha - 1}{2} \times 18}.$$

On en tire $\alpha' = 0,1496$.
A l'aide de cette valeur on trouve $\delta' = 56397234$, d'où

$$z = \frac{\delta - \delta'}{\Delta A' + \left(\alpha' - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 A'} = \frac{24495}{377063826 + \left(\alpha' - \frac{1}{2}\right) \times 180977}$$

$$= 0,00006496.$$

D'où on tire

$$a_2 = 2,86514966496.....$$

CHAPITRE III.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DE LA FONCTION Γ.

Pour faire voir tout le parti que l'on peut tirer de la fonction Γ dans diverses questions d'analyse, nous traiterons de son application à la recherche des intégrales définies, et à la théorie des suites.

A. INTÉGRALES DÉFINIES EXPRIMÉES A L'AIDE DE LA FONCTION Γ.

36. *De l'intégrale* $\int_0^\infty e^{-kx^m} x^{n-1}\,dx$, *k étant fini et plus grand que* 0.

Si dans l'intégrale $\int_0^\infty e^{-kx^m} x^{n-1}\,dx$, on pose $kx^m = y$, on aura

$$x = \frac{y^{\frac{1}{m}}}{k^{\frac{1}{m}}}, \quad x^{n-1} = \frac{y^{\frac{n-1}{m}}}{k^{\frac{n-1}{m}}}, \quad \text{et} \quad dx = \frac{dy}{mk^{\frac{1}{m}} y^{\frac{m-1}{m}}}.$$

En remplaçant, il vient

$$\int_0^\infty e^{-kx^m} x^{n-1}\,dx = \frac{1}{mk^{\frac{n}{m}}}\Gamma\left(\frac{n}{m}\right) \cdots\cdots \qquad (\alpha)$$

De cette intégrale on déduit quelques cas particuliers dignes de remarque : posons $m=2$, et $k=a^2$, nous aurons

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,x^{n-1}\,dx=\frac{1}{2a^n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdots\cdots \qquad (\beta)$$

Si n est un nombre entier pair, posons $n=2n'$, il viendra

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,x^{2n'-1}\,dx=\frac{1}{2a^{2n'}}\Gamma(n')=\frac{1.2.3.\ldots.(n'-1)}{2a^{2n'}}\cdots\cdots \qquad (\gamma)$$

Si n est un nombre entier impair, nous aurons en faisant $n=2n'+1$

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,x^{2n'}\,dx=\frac{1}{2a^{2n'+1}}\Gamma\left(n'+\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots \qquad (\delta)$$

Le second membre pourra se ramener à l'aide de la première propriété de la fonction Γ, à la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ ou $\sqrt{\pi}$. Si $n'=0$, nous obtiendrons

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx=\frac{1}{2a}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2a}\sqrt{\pi}\cdots\cdots \qquad (\delta')$$

On peut remarquer que $e^{-a^2x^2}\,x^{2n'}$ ne change point lorsqu'on remplace x par $-x$, par conséquent la formule (δ) donnera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2}\,x^{2n'}\,dx=\frac{\Gamma\left(n'+\frac{1}{2}\right)}{a^{2n'+1}}.$$

D'où comme précédemment en faisant $n'=0$, nous aurons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\cdots\cdots \qquad (\varepsilon)$$

Cette intégrale définie est d'un grand usage. On en déduit immédiatement l'intégrale définie

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}\left(e^{2bx}+e^{-2bx}\right)dx.$$

En effet dans la formule (ε) remplaçons x par $x+\frac{b}{a}$, on aura les limites restant encore $-\infty$ et $+\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2x^2+2bx)}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{+\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

De même en remplaçant x par $x-\frac{b}{a}$, cette même formnle aurait donné

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a^2x^2-2bx)}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{+\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

D'où en additionnant ces deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2}\left(e^{2bx}+e^{-2bx}\right)dx=\frac{2\sqrt{\pi}}{a}e^{+\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Et si l'on remarque que la différentielle ne change poiut lorsqu'on change le signe de x, on aura

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}\left(e^{2bx}+e^{-2bx}\right)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{+\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

37. Nous avons trouvé (10), la relation qui permet d'exprimer l'intégrale Eulérienne de première espèce à l'aide des fonctions Γ. Toute intégrale définie susceptible d'être exprimée à l'aide d'une des formes de l'intégrale Eulérienne de première espèce, le sera par conséquent immédiatement en fonctions Γ.

Ainsi k étant un coefficient fini et plus grand que zéro; on ramènera immédiatement l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+kx^m)^{a+b}},$$

à l'intégrale Eulérienne de première espèce en posant $kx^m = y$, nous aurons alors

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+kx^m)^{a+b}} = \frac{1}{mk^{\frac{a}{m}}}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{a}{m}-1}\,dy}{(1+y)^{a+b}} = \frac{1}{mk^{\frac{a}{m}}}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{a}{m}-1}\,dy}{(1+y)^{\frac{a}{m}+\left(\frac{m-1}{m}\right)a+b}}.$$

Et d'après ce que nous avons vu (10)

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+kx^m)^{a+b}} = \frac{1}{mk^{\frac{a}{m}}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{m}\right)\Gamma\left(b+\frac{m-1}{m}a\right)}{\Gamma(a+b)}.$$

Si dans cette dernière nous posons $a+b=1$, il vient

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+kx^m} = \frac{1}{mk^{\frac{a}{m}}}\Gamma\left(\frac{a}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{a}{m}\right),$$

Et comme

$$\Gamma\left(\frac{a}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{a}{m}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{a\pi}{m}},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+kx^m)} = \frac{1}{mk^{\frac{a}{m}}}\,\frac{\pi}{\sin\frac{a\pi}{m}}.$$

En posant

$$\frac{a}{m}=\frac{1}{2},$$

on a

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{m}{2}-1}\,dx}{1+kx^m}=\frac{\pi}{m\sqrt{k}},$$

à laquelle il eût été facile de parvenir directement.

Si dans l'intégrale définie

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x^m)^{b-1}\,dx,$$

on pose $x^m=y$, il viendra

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x^m)^{b-1}\,dx=\frac{1}{m}\int_0^1 y^{\frac{a}{m}-1}(1-y)^{b-1}\,dy,$$

et d'après ce que nous avons vu (10)

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x^m)^{b-1}\,dx=\frac{1}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{m}\right)\Gamma(b)}{\Gamma\left(\frac{a}{m}+b\right)}.$$

En posant $\frac{a}{m}+b=1$, on aura

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x^m)^{-\frac{a}{m}}\,dx=\frac{1}{m}\,\frac{\pi}{\sin\frac{a\pi}{m}}.$$

Ces transformations sont fort simples, et sans insister sur d'autres analogues, nous aborderons la recherche de deux intégrales définies extrêmement importantes.

38. *Des intégrales* $\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} \cos bx dx$, $\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} \sin bx dx$.....
a et n finis et plus grands que zéro.

Nous savons que si k représente un coefficient positif, on a la formule

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)}{k^n},$$

Euler croyait que cette formule serait encore vraie, si l'on y remplaçait k par $a + b\sqrt{-1}$, pourvu que a fût positif, et par conséquent que l'on aurait

$$\int_0^\infty e^{-(a+b\sqrt{-1})x} x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)}{(a+b\sqrt{-1})^n} = \frac{\Gamma(n)\,(a-b\sqrt{-1})^n}{(a^2+b^2)^n}.$$

En séparant les parties réelles et les parties imaginaires, nous seront conduits aux valeurs des intégrales proposées, ponr cela soit

$$a = r\cos\alpha, \quad b = r\sin\alpha,$$

d'où

$$r = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}, \quad \text{ou} \quad \alpha = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{b}{a}.$$

Nous aurons

$$\int_0^\infty e^{-(a+b\sqrt{-1})x} x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)\, r^n (\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha)^n}{r^{2n}}$$

$$= \frac{\Gamma(n)(\cos n\alpha - \sqrt{-1}\sin n\alpha)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

11

D'où

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{n-1} \cos bx dx &= \frac{\Gamma(n) \cos n\alpha}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\\ \int_0^{\infty} e^{-ax} x^{n-1} \sin bx dx &= \frac{\Gamma(n) \sin n\alpha}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\end{aligned}\right\} \alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}.$$

Ce sont les formules qu'il s'agit de trouver. On comprend que l'induction qui les a fournies quoique fort ingénieuse, a besoin d'être vérifiée par un procédé plus rigoureux. Nous allons en donner deux démonstrations. La première est fondée, comme celle que Poisson a donnée dans le 16me cahier du *Journal de l'école polytechnique,* sur l'intégration d'un système d'équations différentielles simultanées, mais elle est considérablement simplifiée. Dans la seconde, nous emploierons le développement en série convergente qui nous conduira fort simplement aux formules demandées.

1re *Démonstration.* — Posons

$$y = \int_0^{\infty} e^{-ax} x^{n-1} \cos bx dx,$$

$$z = \int_0^{\infty} e^{-ax} x^{n-1} \sin bx dx.$$

Nous aurons en dérivant par rapport à b,

$$\frac{dy}{db} = -\int_0^{\infty} e^{-ax} x^n \sin bx dx,$$

$$\frac{dz}{db} = +\int_0^{\infty} e^{-ax} x^n \cos bx dx.$$

En remarquant que l'on a

$$\int e^{-ax} \sin bx dx = \frac{-e^{-ax}(b \cos bx + a \sin bx)}{a^2+b^2},$$

l'intégration par parties nous donnera

$$\int e^{-ax} x^n \sin bx dx = -\frac{e^{-ax} x^n (b \cos bx + a \sin bx)}{a^2 + b^2}$$

$$+ \frac{n}{a^2 + b^2} \int e^{-ax} (b \cos bx + a \sin bx) x^{n-1} dx.$$

Si nous prenons les intégrales entre les limites 0 et ∞, en remarquant que le premier terme du second membre s'évanouit aux deux limites, si a et n sont finis et plus grands que zéro, nous aurons

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^n \sin bx dx = \frac{nb}{a^2 + b^2} \int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} \cos bx dx$$

$$+ \frac{na}{a^2 + b^2} \int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} \sin bx dx.$$

Et nous en tirerons

$$\frac{dy}{db} = -\frac{n}{a^2 + b^2}(by + az) \ldots\ldots \quad (1)$$

Et l'on obtiendrait d'une manière analogue

$$\frac{dz}{db} = -\frac{n}{a^2 + b^2}(-ay + bz) \ldots\ldots \quad (2)$$

Ce sont ces équations qui, intigrées, vont nous fournir les valeurs de y et de z. Pour y parvenir, soit

$$\alpha = \text{arc tg}\frac{b}{a},$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{db} = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

les équations différentielles deviendront

$$\frac{dy}{d\alpha} = -\frac{n}{a}(by + az),$$

$$\frac{dz}{d\alpha} = -\frac{n}{a}(-ay + bz),$$

posons de plus,

$$y = (a^2 + b^2)^m u, \quad \text{et} \quad z = (a^2 + b^2)^m v,$$

m étant un exposant que nous déterminerons, les équations transformées seront, après avoir divisé des deux côtés par $(a^2 + b^2)^m$,

$$\frac{du}{d\alpha} = -\frac{b}{a}(2m + n)u - nv.$$

$$\frac{dv}{d\alpha} = -\frac{b}{a}(2m + n)v + nu.$$

Ces équations deviennent très simples en faisant $2m + n = 0$, ou $m = -\frac{n}{2}$, on a alors

$$\frac{du}{d\alpha} = -nv,$$

$$\frac{dv}{d\alpha} = +nu,$$

qui s'intègrent sans peine et donnent A et B étant deux constantes arbitraires.

$$u = A \cos n\alpha + B \sin n\alpha,$$

$$v = A \sin n\alpha - B \cos n\alpha.$$

On voit facilement que la constante $B = 0$, car si l'on pose $b = 0$, et par conséquent $\alpha = 0$, z et par conséquent v doit s'évanouir. Les valeurs de u et de v seront donc

$$u = A \cos n\alpha, \quad v = A \sin n\alpha,$$

Et par suite

$$y = \frac{A \cos n\alpha}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}}, \quad z = \frac{A \sin n\alpha}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Quant à la constante A, on la détermine très facilement en posant b et par conséquent $\alpha = 0$, en remarquant que la valeur de y se réduit alors à $\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} dx$ ou $\frac{\Gamma(n)}{a^n}$, il vient $A = \Gamma(n)$; les valeurs de y et de z sont donc bien celles qui ont été trouvées.

2[me] *Démonstration.*

Pour légitimer l'emploi des formules trouvées par l'induction d'Euler, nous allons démontrer que si elles sont supposées vraies pour une certaine valeur b' de b, elles le sont pour toute valeur de b, telle que $b < b' + a$. Or, comme ces formules se vérifient d'elles-mêmes pour $b' = 0$, elles seront vraies pour $b < a$, étant vraies pour $b < a$, elles le seront pour $b < 2a$ et ainsi de suite, elles seront générales.

Or, remarquons que x et h, étant supposés finis, on a généralement en série convergente

$$\cos(b' + h)x = \cos b'x - hx \sin b'x - \frac{h^2x^2}{1.2}\cos b'x + \frac{h^3x^3}{1.2.3}\sin b'x \ldots\ldots$$

et

$$\sin(b' + h)x = \sin b'x + hx \cos b'x - \frac{h^2x^2}{1.2}\sin b'x - \frac{h^3x^3}{1.2.3}\cos b'x \ldots\ldots$$

Nous supposerons $h < a$, il viendra en multipliant les deux membres par $e^{-ax} x^{n-1}$, pour toute valeur positive et finie de a, de n et de x,

$$e^{-ax} x^{n-1} \cos(b' + h)x = e^{-ax} x^{n-1} \cos b'x - hx^n e^{-ax} \sin b'x \ldots\ldots$$

$$e^{-ax} x^{n-1} \sin(b' + h)x = e^{-ax} x^{n-1} \sin b'x + hx^n e^{-ax} \cos b'x \ldots\ldots$$

Nous pourrons intégrer les deux membres depuis 0 jusqu'à l'infini, si nous démontrons que les intégrales des premiers membres sont finies et déterminées, et si les séries des seconds membres

sont convergentes. Sous ces conditions et en appliquant les formules d'Euler qui sont supposées vraies pour $b = b'$, nous aurons, si $\alpha' = \text{arc tg}\,\frac{b'}{a}$,

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} \cos(b'+h)x\,dx = \frac{\Gamma(n)\cos n\alpha'}{(a^2+b'^2)^{\frac{n}{2}}} - \frac{h}{1}\frac{\Gamma(n+1)\sin(n+1)\alpha'}{(a^2+b'^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$- \frac{h^2}{1.2}\frac{\Gamma(n+2)\cos(n+2)\alpha'}{(a^2+b'^2)^{\frac{n+2}{2}}}\cdots\cdots$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} \sin(b'+h)x\,dx = \frac{\Gamma(n)\sin n\alpha'}{(a^2+b'^2)^{\frac{n}{2}}} + \frac{h}{1}\frac{\Gamma(n+1)\cos(n+1)\alpha'}{(a^2+b'^2)^{\frac{n+1}{2}}}\cdots\cdots$$

ou d'après la première propriété des fonctions Γ,

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} \cos(b'+h)x\,dx$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{(a^2+b'^2)^{\frac{n}{2}}}\left\{\cos n\alpha' - \frac{n}{1}\sin(n+1)\alpha'\frac{h}{(a^2+b'^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{n(n+1)}{1.2}\cos(n+2)\alpha'\frac{h^2}{(a^2+b'^2)}\cdots\right\}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} \sin(b'+h)x\,dx = \frac{\Gamma(n)}{(a^2+b'^2)^{\frac{n}{2}}}\left\{\sin n\alpha' + \frac{n}{1}\cos(n+1)\alpha'\frac{h}{(a^2+b'^2)^{\frac{1}{2}}}\cdots\cdots\right\}$$

Les conditions posées étant visiblement satisfaites, puisque les intégrales des premiers membres sont nécessairement inférieures à $\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1}\,dx$ ou $\frac{\Gamma(n)}{a^n}$, et que les séries des seconds membres sont convergentes, si $h < \sqrt{a^2+b^2}$ et par conséquent si $h < a$.

D'autre part, si nous développons

$$\frac{\Gamma(n)\cos n\alpha}{[a^2+(b'+h)^2]^{\frac{n}{2}}}, \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma(n)\sin n\alpha}{[a^2+(b'+h)^2]^{\frac{n}{2}}}, \quad \cdots\; \alpha = \text{arc tg}\,\frac{b'+h}{a},$$

suivant les puissances de h, nous obtiendrons sans difficulté les développements des seconds membres, ces développements étant convergents, dans les mêmes circonstances. On en conclut que l'on a

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} \cos (b' + h)x dx = \frac{\Gamma(n) \cos n\alpha}{[a^2 + (b' + h)^2]^{\frac{n}{2}}},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} \sin (b' + h)x dx = \frac{\Gamma(n) \sin n\alpha}{[a^2 + (b' + h)^2]^{\frac{n}{2}}},$$

h étant plus petit que a, si ces formules sont vraies pour $h = 0$. On en conclut, comme nous l'avons dit en commençant, que les formules d'Euler sont générales, et que l'on a pour toute valeur de b,

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} \cos bx dx &= \frac{\Gamma(n) \cos n\alpha}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}} \\ \int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} \sin bx dx &= \frac{\Gamma(n) \sin n\alpha}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad \alpha = \text{arc tg} \frac{b}{a}.$$

ce qu'il fallait trouver (*).

Corollaire. — Les formules d'Euler étant démontrées, supposons que n ne soit pas supérieur à l'unité dans la première et intégrons les deux membres par rapport à b, nous aurons

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-2} \sin bx dx = \frac{\Gamma(n) \sin (1 - n)\alpha}{(1 - n)(a^2 + b^2)^{\frac{n-1}{2}}} + c.$$

(*) Mr Kummer a employé le développement en série pour déterminer ces intégrales (*Journal de Crelle*, t. 17), mais la série à laquelle il arrive est divergente, dès que $\text{tg} \frac{b}{a}$ atteint l'unité.

L'intégrale du premier membre est finie et déterminée, tant que $n > 0$, comme il est facile de le démontrer en la décomposant en deux parties, la première

$$\int_0^\varepsilon e^{-ax} x^{n-2} \sin bx dx < b \int_0^\varepsilon e^{-ax} x^{n-1}\, dx < b\frac{\varepsilon^n}{n},$$

qui converge vers zéro avec ε, et la seconde $\int_\varepsilon^\infty e^{-ax} x^{n-2} \sin bx dx$, qui est visiblement finie et déterminée. D'autre part, le second membre reste fini et continu. Pour déterminer la constante, faisons $b = 0$, on aura $c = 0$, et par conséquent

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-2} \sin bx dx = \frac{\Gamma(n) \sin (1-n)\alpha}{(1-n)(a^2+b^2)^{\frac{n-1}{2}}} \qquad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}, \quad n > 0.$$

39. *Des intégrales* $\int_0^\infty x^{n-1} \cos bx dx$ et $\int_0^\infty x^{n-1} \sin bx dx$.

Avant de rechercher les valeurs de ces intégrales, occupons-nous de rechercher sous quelles conditions ces intégrales ont une valeur finie et déterminée.

Pour cela, prenons l'une de ces intégrales, la seconde par exemple, et décomposons la de la manière suivante. Posons

$$\int_0^\infty x^{n-1} \sin bx dx = \int_0^{\frac{\pi}{b}} x^{n-1} \sin bx dx + \int_{\frac{\pi}{b}}^{\frac{2\pi}{b}} x^{n-1} \sin bx dx + \int_{\frac{2\pi}{b}}^{\frac{3\pi}{b}} x^{n-1} \sin bx dx ..$$

puis ramenons toutes les intégrales du second membre aux mêmes limites, en remplaçant successivement x par $x + \frac{\pi}{b}$, $x + \frac{2\pi}{b}$, $x + \frac{3\pi}{b}$, ... etc., nous aurons

$$\int_0^\infty x^{n-1}\sin bx dx = \int_0^{\frac{\pi}{b}} x^{n-1}\sin bx dx + \int_0^{\frac{\pi}{b}}\left(x+\frac{\pi}{b}\right)^{n-1}\sin(bx+\pi)dx$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{b}}\left(x+\frac{2\pi}{b}\right)^{n-1}\sin(bx+2\pi)dx\ldots\ldots$$

D'où

$$\int_0^\infty x^{n-1}\sin bx dx = \int_0^{\frac{\pi}{b}} x^{n-1}\sin bx dx - \int_0^{\frac{\pi}{b}}\left(x+\frac{\pi}{b}\right)^{n-1}\sin bx dx$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{b}}\left(x+\frac{2\pi}{b}\right)^{n-1}\sin bx dx.\ \ldots$$

Sous cette forme il est visible que chacune des intégrales du second membre étant positive de sa nature, ce second membre formera une série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs; il ne reste plus qu'à savoir si les différents termes vont en croissant ou en décroissant indéfiniment. Or, en comparant les différentielles dans une intégrale et dans la suivante, on voit que pour une même valeur de x, la différentielle est plus grande ou plus petite dans la première des deux intégrales, suivant que l'on a $n<1$, ou $n>1$. Il est facile d'en tirer les conclusions suivantes :

1° Si $n>1$, la série

$$\int_0^{\frac{\pi}{b}} x^{n-1}\sin bx dx - \int_0^{\frac{\pi}{b}}\left(x+\frac{\pi}{b}\right)^{n-1}\sin bx dx + \int_0^{\frac{\pi}{b}}\left(x+\frac{2\pi}{b}\right)^{n-1}\sin bx dx\ldots$$

est divergente, et par conséquent l'intégrale $\int_0^\infty x^{n-1}\sin bx dx$ est indéterminée.

2° Si $n<1$, la série

$$-\int_0^{\frac{\pi}{b}}\left(x+\frac{\pi}{b}\right)^{n-1}\sin bx dx+\int_0^{\frac{\pi}{b}}\left(x+\frac{2\pi}{b}\right)^{n-1}\sin bx dx-\int_0^{\frac{\pi}{b}}\left(x+\frac{3\pi}{b}\right)^{n-1}\sin bx dx\dots$$

est convergente, et la somme en est finie et déterminée.

L'intégrale $\int_0^\infty x^{n-1}\sin bx dx$, sera donc aussi finie et déterminée, si $\int_0^{\frac{\pi}{b}} x^{n-1}\sin bx dx$, est finie et déterminée. Or, le sinus d'un arc étant plus petit que l'arc lui-même, supposons $n>-1$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{b}} x^{n-1}\sin bx dx < b\int_0^{\frac{\pi}{b}} x^n dx,$$

l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{b}} x^n dx$, étant finie et déterminée, si $n>-1$, on en conclut finalement que l'intégrale $\int_0^\infty x^{n-1}\sin bx dx$, est finie et déterminée, si n est compris entre les limites -1 et $+1$. Il est au contraire fort facile de démontrer que $\int_0^{\frac{\pi}{b}} x^{n-1}\sin bx dx$ est infini, si $n<-1$, et par conséquent qu'il en est de même de l'intègrale $\int_0^\infty x^{n-1}\sin bx dx$.

Il est donc démontré que l'intégrale $\int_0^\infty x^{n-1}\sin bx dx$, est infinie si n est égal à -1 ou plus petit que -1; qu'elle est indéterminée si n est plus grand que 1 (on voit immédiatement qu'elle est également indéterminée si $n=1$); enfin qu'elle est finie et déterminée pour $-1<n<+1$.

En appliquant une décomposition analogue à l'intégrale $\int_0^\infty x^{n-1}\cos bx dx$, on reconnaîtra :

Qu'elle est infinie pour $n=0$ ou $n<0$,

Qu'elle est indéterminée pour $n=1$ ou $n>1$;

Qu'elle est finie et déterminée pour $0<n<1$.

D'après cela, il sera fort facile de trouver les valeurs des intégrales proposées dans le cas où leur valeur est déterminée. Supposons que pour toutes deux l'on ait $0<n<1$.

D'après ce que nous venons de dire, l'on aura

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty x^{n-1}\cos bx\,dx &= \lim\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{n-1}\cos bx\,dx\\ \int_0^\infty x^{n-1}\sin bx\,dx &= \lim\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{n-1}\sin bx\,dx\end{aligned}\right\}\quad 0<n<1.$$

Or, les intégrales

$$\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{n-1}\cos bx\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{n-1}\sin bx\,dx,$$

sont égales aux limites vers lesquelles convergent

$$\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-ax}x^{n-1}\cos bx\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-ax}x^{n-1}\sin bx\,dx$$

quand a converge vers zéro; et d'après les formules d'Euler, on a

$$\left.\begin{aligned}\lim\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-ax}x^{n-1}\cos bx\,dx &= \frac{\Gamma(n)\cos n\alpha}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\\ \lim\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-ax}x^{n-1}\sin bx\,dx &= \frac{\Gamma(n)\sin n\alpha}{(a^2+b^2)^{\frac{\pi}{2}}}\end{aligned}\right\}\quad \alpha = \text{arc tg}\,\frac{b}{a}.$$

on en tirera la conclusion

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty x^{n-1}\cos bx dx &= \lim \frac{\Gamma(n)\cos n\alpha}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\\ \int_0^\infty x^{n-1}\sin bx dx &= \lim \frac{\Gamma(n)\sin n\alpha}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\end{aligned}\right\} \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}.$$

a convergeant vers zéro. Or, les limites sont très faciles à trouver, les numérateurs convergeant vers $\Gamma(n)\cos\frac{n\pi}{2}$ et $\Gamma(n)\sin\frac{n\pi}{2}$, et les dénominateurs vers b^n; on aura

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty x^{n-1}\cos bx dx &= \frac{\Gamma(n)\cos\frac{n\pi}{2}}{b^n}\\ \int_0^\infty x^{n-1}\sin bx dx &= \frac{\Gamma(\sin n)\frac{n\pi}{2}}{b^n}\end{aligned}\right\} \quad 0 < n < 1.$$

De la même manière en partant de la formule

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-2}\sin bx dx = \frac{\Gamma(n)\sin(1-n)\alpha}{(1-n)(a^2+b^2)^{\frac{n-1}{2}}},$$

on aurait tiré

$$\int_0^\infty x^{n-2}\sin bx dx = \frac{\Gamma(n)\sin(1-n)\frac{\pi}{2}}{(1-n)b^{n-1}}, \quad n > 0, \quad n < 1.$$

Cette formule étant du reste encore vraie pour $n = 1$, attendu qu'elle est vraie pour des valeurs de n aussi peu distantes qu'on voudra de l'unité, et qu'il n'y a aucune discontinuité pour cette valeur.

On a donc les valeurs des intégrales proposées exprimées à l'aide

de la fonction Γ, aussi longtemps que ces intégrales sont finies et déterminées.

On peut présenter les formules précédentes sous une autre forme, en faisant usage de la seconde propriété des fonctions Γ, qui donne

$$\Gamma(n) = \frac{\pi}{\Gamma(1-n)\sin n\pi},$$

les deux premières deviendront

$$\int_0^\infty x^{n-1}\cos bx dx = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{b^n\Gamma(1-n)\sin n\pi} = \frac{1}{b^n\Gamma(1-n)}\frac{\pi}{2\sin\frac{n\pi}{2}}$$

$$\int_0^\infty x^{n-1}\sin bx dx = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{b^n\Gamma(1-n)\sin n\pi} = \frac{1}{b^n\Gamma(1-n)}\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}$$

$$n > 0, \quad n < 1.$$

et la 3°

$$\int_0^\infty x^{n-2}\sin bx dx = \frac{\sin(1-n)\frac{\pi}{2}}{(1-n)\Gamma(1-n)b^{n-1}\sin n\pi}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-n)b^{n-1}}\frac{\pi}{2\sin\frac{n\pi}{2}}, \quad 0 < n \overline{\overline{<}} 1.$$

Si dans les deux premières, nous posons $1 - n = a$, a étant par conséquent compris entre 0 et 1, on trouvera facilement

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^a}dx = \frac{b^{a-1}}{\Gamma(a)}\frac{\pi}{2\cos\frac{a\pi}{2}}, \text{ et } \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^a}dx = \frac{b^{a-1}}{\Gamma(a)}\frac{\pi}{2\sin\frac{a\pi}{2}}, \quad 0 < a < 1.$$

Si dans la troisième, nous remplaçons $2 - n$ par a, nous aurons

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^a} dx = \frac{b^{a-1}}{\Gamma(a)} \frac{1}{2 \sin \frac{a\pi}{2}},$$

a étant plus petit que 2, et au moins égal à 1.

Cette formule est la même que la précédente qui est valable pour $0 < a < 1$, on a donc les deux formules suivantes

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx dx}{x^a} = \frac{b^{a-1}}{\Gamma(a)} \frac{1}{2 \cos \frac{a\pi}{2}}, \quad 0 < a < 1,$$

et

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^a} dx = \frac{b^{a-1}}{\Gamma(a)} \frac{\pi}{2 \sin \frac{a\pi}{2}}, \quad 0 < a < 2, \quad b > 0.$$

Corollaires : 1° Si dans cette dernière, on pose $a = 1$, on a l'intégrale connue,

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2° Pour $a = \frac{1}{2}$, $\Gamma(a) = \sqrt{\pi}$, et il vient

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2b}}.$$

Si dans ces formules, nous faisons $x = y^2$, on trouve

$$\int_0^\infty \cos (by^2)\, dy = \int_0^\infty \sin (by^2)\, dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}.$$

Ces deux formules peuvent se remplacer par la seule formule suivante

$$\int_0^{\infty} e^{by^2\sqrt{-1}}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\,e^{\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}}.$$

En prenant les intégrales entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{by^2\sqrt{-1}}\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\,e^{\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}}.$$

Cette dernière en y posant $y = x + \frac{k}{b}$ devient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(bx^2+2kx)\sqrt{-1}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\,e^{\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{k^2}{b}\right)\sqrt{-1}},$$

formule assez remarquable, et qui a été employée par Mr Lejeune-Dirichlet dans la réduction d'une intégrale multiple.

40. *Des intégrales*

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\left(p \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}}\frac{db}{b^q}, \quad a > 0, \quad 0 < q < 1, \quad p + q > 1.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\left(p \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}}\frac{db}{b^q}, \quad a > 0, \quad 0 < q < 2, \quad p + q > 1.$$

Il est fort facile de démontrer d'abord que sous les conditions posées, ces intégrales seront finies et déterminées, car on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\left(p \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}}\frac{db}{b^p} = \int_0^{\varepsilon} \frac{\cos\left(p \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}}\frac{db}{b^q} + \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\cos\left(p \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}}\frac{db}{b^p}$$

$$+ \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{\cos\left(p \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}}\frac{db}{b^q},$$

et l'on voit immédiatement que

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{db}{b^q} \frac{\cos\left(p \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}} < \frac{1}{a^p} \int_0^{\varepsilon} \frac{db}{b^q},$$

$$\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{db}{b^q} \frac{\cos\left(p \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}} < \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{db}{b^{p+q}},$$

ces intégrales convergeant vers zéro, si $0 < q < 1$, $p + q > 1$ et $a < 0$.

De même

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\left(p \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}} \frac{db}{b^q} = \int_0^{\varepsilon} \frac{\sin\left(p \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}} \frac{db}{b^q} + \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\sin\left(p \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}} \frac{db}{b^q}$$

$$+ \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{\sin\left(p \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}} \frac{db}{b^q}.$$

Et l'on voit que

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\sin\left(p \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}} \frac{db}{b^q} < \frac{p}{a} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}} \frac{db}{b^{q-1}} < \frac{p}{a^{p+1}} \int_0^{\varepsilon} \frac{db}{b^{q-1}},$$

et

$$\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{db}{b^q} \frac{\sin\left(p \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}} < \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{db}{b^{p+q}},$$

ces intégrales convergent vers zéro, si $0 < q < 2$, $p + q > 1$ et $a > 0$.

Ceci posé, occupons-nous de rechercher la valeur de l'une de ces intégrales, de la première par exemple, ε étant une quantité plus grande que 0, mais qui peut devenir inférieure à toute valeur assignable, on aura rigoureusement

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{db}{b^q} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-ax} x^{p-1} \cos bx dx = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-ax} x^{p-1} dx \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\cos bx}{b^q} db.$$

En suivant la même marche qu'au N° 10, et en remarquant que d'après les formules des N°s 38 et 39, on a

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{p-1} \cos bx dx = \frac{\Gamma(p) \cos\left(p \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}} \qquad p > 0,$$

et

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{b^q} = \frac{x^{q-1}}{\Gamma(q)} \frac{1}{2 \cos \frac{1}{2} q\pi},$$

x étant plus grand que 0, et q compris entre 0 et l'unité, il viendra

$$\Gamma(p) \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{db}{b^q} \frac{\cos\left(p \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}} - \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{db}{b^q} \int_0^{\varepsilon} e^{-ax} x^{p-1} \cos bx dx - \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{db}{b^q} \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-ax} x^{p-1} \cos bx dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(q) 2 \cos \frac{1}{2} q\pi} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-ax} x^{p+q-1} dx - \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-ax} x^{p-1} dx \int_0^{\varepsilon} \frac{\cos bx dx}{b^q} - \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-ax} x^{p-1} dx \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{\cos bx}{b^q} dx.$$

Or, l'on voit facilement que sous les conditions posées

1° $\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{db}{b^q} \int_0^{\varepsilon} e^{-ax} x^{p-1} \cos bx dx = \mu \varepsilon^{p+q-1}$,

μ pouvant varier depuis 0 jusqu'à l'unité.

$$2^{\circ}\quad \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{db}{b^q}\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty}e^{-ax}x^{p-1}\cos bx\,dx=\nu\varepsilon^{1-q},$$

ν étant compris entre -1 et $+1$, pourvu que ε satisfasse aux conditions

$$\frac{1}{\varepsilon}>p+1,\quad \text{et}\quad e^{\frac{1}{\varepsilon}}>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{p+1}.$$

$$3^{\circ}\quad \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}}e^{-ax}x^{p-1}\,dx\int_{0}^{\varepsilon}\frac{\cos bx}{b^q}db=\frac{\lambda\Gamma(p)\varepsilon^{1-q}}{a^p},$$

λ étant compris entre 0 et l'unité.

$$4^{\circ}\quad \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}}e^{-ax}x^{p-1}\,dx\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty}\frac{\cos bx}{b^q}db=\rho\varepsilon^{q}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}}e^{-ax}x^{p-2}\,dx,$$

ρ étant compris entre -1 et $+1$.

D'après cela l'égalité primitive deviendra

$$\Gamma(p)\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{db}{b^q}\frac{\cos\left(p\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}}+\mu\varepsilon^{p+q-1}+\nu\varepsilon^{1-q}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(q)\,2\cos\frac{1}{2}q\pi}\int_{0}^{\varepsilon}e^{-ax}x^{p+q-2}\,dx+\frac{\lambda\Gamma(p)\varepsilon^{1-q}}{a^p}+\rho\varepsilon^{q}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}}e^{-ax}x^{p-2}\,dx.$$

Il est facile de prouver que le terme

$$\rho\varepsilon^{q}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}}e^{-ax}x^{p-2}\,dx,$$

converge vers zéro avec ε; en effet, il n'y a point de doute si $p>1$. Si p est égal ou inférieur à l'unité, tout en étant plus grand que zéro, on aura

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-ax} x^{p-2}\, dx < \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} x^{p-2}\, dx < \frac{\varepsilon^{p-1}}{p-1}, \quad \text{si } p<1,$$

et

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-ax} x^{p-2}\, dx < -\log \varepsilon, \quad \text{si } p=1,$$

et par conséquent on pourra donner à l'intègrale la forme

$$\rho_1 \frac{\varepsilon^{q+p-1}}{p-1} \quad \text{ou} \quad -\rho_1 \varepsilon^q \log \varepsilon,$$

et il est évident sous ces deux formes qu'elle converge vers zéro avec ε. Si dans l'égalité obtenue on fait converger ε vers zéro, il est visible maintenant que les deux membres convergeront vers une limite fixe, et l'on aura en égalant ces limites

$$\Gamma(p) \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(p \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}} \frac{db}{b^q} = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(q)} \frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi},$$

ou

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\left(p \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}} \frac{db}{b^q} = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi}, \quad 0<q<1, \quad a>0, \quad p+q>1.$$

On démontrerait d'une manière analogue que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\left(p \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}} \frac{db}{b^q} = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}q\pi}, \quad 0<q<2, \quad a>0, \quad p+q>1.$$

Dans ces deux équations si on remplace $\frac{b}{a}$ par x, on aura

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{\cos(p \operatorname{arc}\operatorname{tg} x)}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}p}}\frac{dx}{x^q} = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi}, \quad 0<q<1\\ &\int_0^\infty \frac{\sin(p \operatorname{arc}\operatorname{tg} x)}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}p}}\frac{dx}{x^q} = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}q\pi}, \quad 0<q<2\end{aligned}\right\} p+q-1>0.$$

On peut transformer ces denx formules en posant arc tg $x = \alpha$, et l'on aura avec les mêmes conditions

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(p\alpha)\cos^{p-2}\alpha \cot^q \alpha d\alpha = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(p\alpha)\cos^{p-2}\alpha \cot^q \alpha d\alpha = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}q\pi},$$

Corollaires : 1° Si dans la seconde de ces formules, on pose $q = 1$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin p\alpha}{\sin\alpha}\cos^{p-1}\alpha d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

2° Ponr $p = 2$, les formules donneront

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\alpha \cot^q \alpha\, d\alpha = \frac{q\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\alpha \cot^q \alpha\, d\alpha = \frac{q\pi}{2\sin\frac{1}{2}q\pi},$$

3° Supposons que l'on ait $p =$ un nombre entier, on a dans ce cas

$$\frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = \frac{q(q+1)\cdots\cdots(q+p-2)}{1.2\ldots\ldots..(p-1)},$$

et par conséquent si nous représentons par r une quantité plus petite que l'unité, les formules donneront

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\alpha)^p \cos p\alpha \frac{\cot^q\alpha\, d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{q(q+1)\ldots\ldots(q+p-2)}{1.2\ldots\ldots p-1} r^p \frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi},$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\alpha)^p \sin p\alpha \frac{\cot^q\alpha\, d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{q(q+1)\ldots\ldots(q+p-2)}{1.2\ldots\ldots(p-1)} r^p \frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}q\pi},$$

Si dans cette dernière, nous faisons successivement $p=1=2=3\ldots\ldots4\ldots\ldots$ jusqu'à l'infini, nous aurons en ajoutant

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(r\cos\alpha)\sin\alpha + (r\cos\alpha)^2\sin 2\alpha + (r\cos\alpha)^3\sin 3\alpha\ldots\ldots \Big\} \frac{\cot^q\alpha\, d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$= \Big\{ 1 + \frac{q}{1}r + \frac{q(q+1)}{1.2}r^2 + \ldots\ldots \Big\} \frac{r\pi}{2\sin\frac{1}{2}q\pi}.$$

Si l'on remplace les séries convergentes des deux membres par leurs sommes, savoir :

$$(r\cos\alpha)\sin\alpha + (r\cos\alpha)^2\sin 2\alpha + (r\cos\alpha)^3\sin 3\alpha\ldots\ldots = \frac{(r\cos\alpha)\sin\alpha}{1-(2r-r^2)\cos^2\alpha},$$

et

$$1 + \frac{q}{1}r + \frac{q(q+1)}{1.2}r^2 + \ldots\ldots = \frac{1}{(1-r)^q},$$

on aura l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot^q\alpha\, d\alpha}{1-(2r-r^2)\cos^2\alpha} = \frac{1}{(1-r)^q} \frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}q\pi} \qquad 1 > r > -1. \quad 2 > q > 0.$$

B. DE LA FONCTION Γ APPLIQUÉE A LA THÉORIE DES SUITES.

41. *Lemme fondamental.* — 1° Si X représente une fonction de x, $f(x, k)$ une fonction de x et de k, k étant un nombre entier, et que l'on ait

$$\int_a^b Xf(x,k)dx = B_k \int_a^b Xf(x,0)dx \ldots\ldots \quad (1)$$

B_k étant une fonction connue de k. D'autre part si l'on a rigoureusement pour $a < x < b$, ainsi que pour les valeurs extrêmes $x = a$, $x = b$, la série infinie

$$A_0 f(x,0) + A_1 f(x,1) + A_2 f(x,2) \cdots = \varphi(x) \ldots\ldots \quad (2)$$

on aura

$$A_0 B_0 + A_1 B_1 + A_2 B_2 \ldots\ldots = \frac{\int_a^b X\varphi(x)\,dx}{\int_a^b Xf(x,0)dx} \ldots\ldots \quad (3)$$

Il suffit pour le démontrer de multiplier les deux membres de l'équation (2) par Xdx, et d'intégrer entre les limites a et b, il viendra

$$\int_a^b X\varphi(x)dx = A_0 \int_a^b Xf(x,0)dx + A_1 \int_a^b Xf(x,1)dx + A_2 \int_a^b Xf(x,2) + \cdots \text{etc.}$$

Et par suite, appliquant la formule (1), on en tirera immédiatement la formule (3).

2° Si comme dans le cas précédent, on a

$$\int_a^b Xf(x,k)dx = B_k \int_a^b Xf(x,0)dx \ldots\ldots \quad (1)$$

Si de plus la formule

$$A_0 f(x,0) + A_1 f(x,1) + A_2 f(x,2) \cdots\cdots = \varphi(x) \ldots\ldots \quad (2)$$

n'est rigoureuse que pour $a < x < b$, c'est-à-dire, si la série devient divergente pour une des valeurs extrêmes, ou pour ces deux valeurs, on aura encore

$$A_0 B_0 + A_1 B_1 + A_2 B_2 + \cdots\cdots = \frac{\int_a^b X\varphi(x)dx}{\int_a^b Xf(x,0)dx} \cdots\cdots \quad (3)$$

si la série du premier membre est convergente, et si l'intégrale $\int_a^b X\varphi(x)dx$ est finie et déterminée.

Il suffit pour le démontrer de multiplier les deux membres de l'équation (2) par Xdx, et d'intégrer entre les limites $a+\varepsilon$, et $b-\varepsilon$, si b est fini, et depuis $a-\varepsilon$, jusqu'à $\frac{1}{\varepsilon}$, si b est infini, puis de faire converger ε vers zéro; on remarquera que sous les deux conditions que nous avons énoncées, les deux membres convergeront vers une limite finie et déterminée, d'où en passant à la limite, on tirera l'équation (3).

Ce Lemme fondamental étant ainsi démontré, nous remarquerons qu'il établit une relation entre une série infinie et le rapport de deux intégrales définies. Il pourra donc servir à trois usages différents.

1° Si l'intégrale $\int_a^b Xf(x,0)dx$, est une intégrale connue, nous aurons une intégrale définie liée à une série infinie par une équation.

Cette équation donnera donc la série sous forme d'intégrale définie, ou réciproquement l'intégrale définie développée en série.

2° Si le rapport des deux intégrales du second membre est connu, la somme de la série sera connue.

3° Si au contraire, la somme de la série est connue, on aura le rapport des intégrales du second membre, et par conséquent l'intégrale définie $\int_a^b X\varphi(x)dx$, si $\int_a^b Xf(x,0)dx$ est connue.

Or, en nous servant des propriétés connues de la fonction Γ, nous allons, en appliquant le Lemme précédent, arriver à la transformation de quelques suites, ou à la connaissance de quelques intégrales définies dignes de remarque; c'est ce qui fera l'objet des numéros suivants :

42. Prenons $X = e^{-x} x^{\alpha-1}$, $f(k,x) = x^k$.

On a d'après une formule connue

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha+k-1}\, dx = \Gamma(\alpha+k) = \alpha(\alpha+1)\cdots\cdots(\alpha+k-1)\Gamma(\alpha),$$

B_k est donc par conséquent égal à $\alpha(\alpha+1)\ldots\ldots(\alpha+k-1)$; si de plus on a pour toute valeur finie de x

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \cdots\cdots = \varphi(x),$$

on aura d'après le Lemme fondamental

$$A_0 + \alpha A_1 + \alpha(\alpha+1)A_2 + \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)A_3 + \cdots = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \varphi(x)\, dx.$$

Si la série du premier membre est convergente, et si l'intégrale du second membre est finie et déterminée.

Exemple. Posons $\varphi x = \cos(2b\sqrt{x})$, il vient

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -\frac{b^2}{\frac{1}{2}\cdot 1}, \quad A_2 = +\frac{b^4}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}1.2}\cdots\cdots$$

et l'on aura par conséquent

$$1 - \frac{\alpha b^2}{\frac{1}{2}\cdot 1} + \frac{\alpha(\alpha+1)b^4}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}1.2} - \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)b^6}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}1.2.3} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \cos(2b\sqrt{x})\, dx.$$

la série du premier membre étant convergente pour toute valeur finie de b, et l'intégrale du second membre étant finie et déterminée ainsi qu'on le démontrerait sans peine. Cette formule exprime donc la série du premier membre par une intégrale définie, ou elle donne l'intégrale définie développée en série. Si nous donnons à α, la valeur particulière $\alpha = \frac{1}{2}$, notre égalité deviendra

$$1 - \frac{b^2}{1} + \frac{1}{1.2} b^4 - \frac{1}{1.2.3} b^6 + \cdots\cdots = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{1}{2}-1} \cos(2b\sqrt{x}) dx.$$

Or, la somme de la série du premier membre est connue, c'est e^{-b^2}, nous aurons donc l'intégrale définie du second membre

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} \cos(2b\sqrt{x}) dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{-b^2} = \sqrt{\pi}\, e^{-b^2}.$$

Si dans cette intégrale, on remplace x par x^2, elle devient

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2bx)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2},$$

ou

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = \sqrt{\pi}\, e^{-b^2}.$$

Si dans ces intégrales, on remplace x par ax, et b par $\frac{b}{a}$, on obtiendra facilement

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{-\frac{1}{2}} \cos(2b\sqrt{x}) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{a^2}}.$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos(2bx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{b^2}{a^2}},$$

ou

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2}\cos(2bx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\frac{b^2}{a^2}}.$$

En appliquant le même théorème au développement de

$$\varphi x = \frac{e^{2b\sqrt{x}} + e^{-2b\sqrt{x}}}{2},$$

on arriverait à l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\left(\frac{e^{2bx} + e^{-2bx}}{2}\right),$$

à laquelle nous sommes déjà parvenus par une autre voie.

43. On a

$$\int_0^\infty e^{-(a+k)x}x^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\beta)}{(a+k)^\beta}.$$

D'où si nous posons

$$B_k = \frac{1}{(a+k)^\beta},$$

nous aurons le théorème suivant.

Si l'on a pour toutes les valeurs de u comprises entre 0 et 1,

$$A_0 + A_1u + A_2u^2 \ldots\ldots = \varphi(u),$$

ou ce qui revient au même, pour x compris entre 0 et ∞,

$$A_0 + A_1e^{-x} + A_2e^{-2x} + \ldots\ldots = \varphi(e^{-x}),$$

on aura sous les conditions posées (41),

$$\frac{A_0}{a^\beta} + \frac{A_1}{(a+1)^\beta} + \frac{A_2}{(a+2)^\beta} + \ldots\ldots = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty e^{-ax}x^{\beta-1}\varphi(e^{-x})dx.$$

Si nous supposons, r étant < 1,

$$\varphi(u) = \frac{r \cos \omega - r^2 u}{1 - 2ru \cos \omega + r^2 u^2}, \quad \text{ou} \quad \varphi(e^{-x}) = \frac{r \cos \omega - r^2 e^{-x}}{1 - 2re^{-x} \cos \omega + r^2 e^{-2x}}.$$

Le développement en série donne

$$\varphi(e^{-x}) = r \cos \omega + r^2 e^{-x} \cos 2\omega + r^3 e^{-2x} \cos 3\omega + \dots\dots$$

et par conséquent

$$\frac{r \cos \omega}{a^\beta} + \frac{r^2 \cos 2\omega}{(a+1)^\beta} + \frac{r^3 \cos 3\omega}{(a+2)^\beta} + \dots\dots = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} x^{\beta-1} (r \cos \omega - r^2 e^{-x})}{1 - 2re^{-x} \cos \omega + r^2 e^{-2x}} dx.$$

44. On déduit un théorème fort important, en appliquant le Lemme fondamental à la formule connue

$$\int_0^1 x^{\alpha+k-1} (1-x)^{\beta-\alpha-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+k)}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots\dots(\alpha+k-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots\dots(\beta+k-1)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)}.$$

Si

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots\dots = \varphi(x).$$

pour toutes valeurs de x comprises entre 0 et 1, on aura sous les conditions énoncées (41),

$$A_0 + \frac{\alpha}{\beta} A_1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)} A_2 + \dots\dots = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-\alpha-1} \varphi(x) dx.$$

Exemple. Posons $\varphi(x) = (1 - ux)^{-\gamma}$, où nous supposerons $-1 < u < +1$, on aura en développant $\varphi(x)$,

$$A_n = \frac{\gamma(\gamma+1)\dots\dots(\gamma+n-1)}{1.2\dots\dots n} u^n,$$

et par suite

$$1+\frac{\gamma}{1}\frac{\alpha}{\beta}u+\frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2}\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}u^2+\frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{1.2.3}\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}u^3.....$$

$$=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-\alpha-1}(1-ux)^{-\gamma}dx..... \quad (1)$$

La série étant toujours convergente, si $-1<u<1$, et l'intégrale étant toujours finie et déterminée avec la même condition, on peut donner à γ toutes les valeurs possibles. On a un cas particulier remarquable en posant $\gamma=\beta$, il vient alors

$$1+\frac{\alpha}{1}u+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}u^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3}u^3+.....$$

$$=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\ \beta-\alpha)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}dx.$$

Or, la somme de la série du premier membre est connue, c'est $(1-u)^{-\alpha}$, nous aurons donc l'intégrale définie

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}dx=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{(1-u)^{\alpha}} \quad -1<u<1.$$

Reprenons la série (1), et faisons tendre u vers l'unité, il s'agit de voir si les deux membres convergent tous deux vers une limite finie et déterminée. Quant au second membre, il converge vers

$$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-\alpha-\gamma-1}dx,$$

valeur finie et déterminée, si l'on a $\beta-\alpha-\gamma>0$; cette valeur est alors

$$\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\gamma)}=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta-\alpha-\gamma)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\gamma)}, \quad \beta>\alpha+\gamma.$$

Or, je dis qu'il en est de même du premier membre, car si nous supposons γ positif, le terme général de la série

$$1+\frac{\gamma}{1}\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2}\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}+\ldots..$$

se mettra facilement sous la forme

$$\frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\gamma)}\times\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha)},$$

ou

$$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}\times\frac{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(n+1)}.$$

Or, en ayant recours à la formule de Stirling, comme nous l'avons déjà fait pour la formule de Mr Binet, nous aurons

$$\Gamma(\alpha+n)<\sqrt{2\pi}\,(\alpha+n)^{\alpha+n-\frac{1}{2}}\,e^{-(\alpha+n)}\,e^{\frac{1}{24(\alpha+n)}},$$

$$\Gamma(\gamma+n)<\sqrt{2\pi}\,(\gamma+n)^{\gamma+n-\frac{1}{2}}\,e^{-(\gamma+n)}\,e^{\frac{1}{24(\gamma+n)}},$$

$$\Gamma(n+1)>\sqrt{2\pi}\,(n+1)^{n+\frac{1}{2}}\,e^{-(n+1)},$$

$$\Gamma(\beta+n)>\sqrt{2\pi}\,(\beta+n)^{\beta+n-\frac{1}{2}}\,e^{-(\beta+n)}.$$

Et par suite

$$\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta+n)}<\left(\frac{(\alpha+n)(\gamma+n)}{(n+1)(\beta+n)}\right)^{n-\frac{1}{2}}\frac{(\alpha+n)^{\alpha}(\gamma+n)^{\gamma}}{(\beta+n)^{\beta}(n+1)}\,e^{-(\beta+1-\alpha-\gamma)}\,e^{\frac{1}{24(\alpha+n)}+\frac{1}{24(\gamma+n)}}.$$

D'où si α et γ sont plus petits que β, on aura en remarquant que

$$\left(\frac{(\alpha+n)(\gamma+n)}{(n+1)(\beta+n)}\right)^{n-\frac{1}{2}},$$

est constamment au-dessous de l'unité pour des valeurs assez grandes de n, et que

$$e^{\frac{1}{24(\alpha+n)}+\frac{1}{24(\gamma+n)}}<e^{\frac{1}{12}},$$

on aura pour le terme général de la série

$$T_n<\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}\frac{1}{(\beta+n)^{\beta-\alpha-\gamma}(n+1)}e^{(\beta+1-\alpha-\gamma)}e^{\frac{1}{12}}.$$

Or, la série dont le terme général est T_n sera visiblement convergente, si $\beta-\alpha-\gamma>0$.

Si γ était négatif, β étant encore supposé plus grand que α, la série sera visiblement convergente, car on trouve pour le rapport de deux termes consécutifs

$$\frac{\gamma-n}{n+1}\frac{\alpha+n}{\beta+n}.$$

Si l'on suppose $n>\gamma$, ce rapport sera négatif, et par conséquent les deux termes seront de signe contraire, et de plus ce rapport étant <1, les termes iront en décroissant; il est visible d'ailleurs qu'ils décroissent sans limite, la série sera donc convergente, et l'on a toujours, sous les deux conditions $\beta>\alpha$, $\beta>\alpha+\gamma$,

$$1+\frac{\gamma}{1}\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2}\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}+\cdots\cdots=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta-\alpha-\gamma)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\gamma)}.$$

Cette belle formule est due à Gauss. Si on y pose $\gamma=1$, on en déduit comme cas particulier

$$1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}+\cdots\cdots=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta-\alpha-1)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-1)}=\frac{\beta-1}{\beta-\alpha-1},\quad \beta>\alpha+1.$$

45. *De quelques intégrales définies déduites de la formule de Gauss.*

Reprenons la formule du numéro précédent

$$A_0+\frac{\alpha}{\beta}A_1+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}A_2+\cdots\cdots=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-\alpha-1}\varphi(x)dx.$$

Les coefficients A_0, A_1, A_2..... étant déterminés par

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots$$

Remplaçons dans ces formules x par $\sin^2 z$, et posons d'abord

$$\varphi(x) = \cos 2\beta z,$$

on aura d'après un développement connu

$$\cos 2\beta z = 1 - \frac{\beta^2}{1.2}(2\sin z)^2 + \frac{\beta^2(\beta^2-1)}{1.2.3.4}(2\sin z)^4 \ldots\ldots$$

Et par suite

$$\frac{2\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha-1} z \cos^{2\beta-2\alpha-1} z \cos 2\beta z\, dz$$

$$= 1 - \frac{\beta\,.\,\alpha}{\frac{1}{2}\cdot 1} + \frac{\beta(\beta-1)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}\,\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} + \ldots\ldots$$

Or, d'après la formule de Gauss, nous connaissons la valeur du second membre, c'est

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha+\beta\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}, \quad \alpha < \frac{1}{2},$$

nous aurons donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha-1} \cos^{2\beta-2\alpha-1} z \cos 2\beta z dz = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha+\beta\right)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}{2\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}$$

Cette formule se simplifie considérablement à l'aide des propriétés connues de la fonction Γ; en effet, on a

$$\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)=2^{\frac{1}{2}-2\beta}\sqrt{2\pi}\,\Gamma(2\beta).$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)=\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\cos\alpha\pi},$$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)=2^{\frac{1}{2}-2\alpha}\sqrt{2\pi}\,\Gamma(2\alpha),$$

$$\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta-\alpha\right)=2^{\frac{1}{2}-2\beta+2\alpha}\sqrt{2\pi}\,\Gamma(2\beta-2\alpha).$$

Faisant usage de ces formules, on trouve facilement

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\alpha-1}\cos^{2\beta-2\alpha-1}\cos 2\beta z dz=\frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(2\beta-2\alpha)}{\Gamma(2\beta)}\cos\alpha\pi.$$

Posant $2\alpha=p$, et $2(\beta-\alpha)=q$, nous aurons

$$(1)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}z\cos^{q-1}z\cos(p+q)zdz=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\cos\frac{1}{2}p\pi,\qquad 1>p>0,\ q>0.$$

On trouve d'une manière analogue l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}z\cos^{q-1}z\sin(p+q)zdz.$$

En effet, en posant

$$\varphi(x)=\varphi(\sin^2 z)=\sin 2\beta z=\frac{\beta}{1}(2\sin z)^1\cos z-\frac{\beta(\beta^2-1)}{1.2.3}(2\sin z)^3\cos z+\cdots$$

la même formule nous donnera

$$\frac{2\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta-\alpha+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\alpha-1}\cos^{2\beta-1}z\sin(2\beta z)dz$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}}-\frac{(\beta-1)\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1}+\frac{(\beta-1)(\beta-2)\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)(\alpha+1)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 1.2}\cdots\cdots$$

ou d'après la série de Gauss,

$$=\frac{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)} \quad \alpha<1.$$

A l'aide des mêmes transformations que plus haut haut, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\alpha-1}z\cos^{2\beta-2\alpha-1}z\sin(2\beta z)dz=\frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(2\beta-2\alpha)}{\Gamma(2\beta)}\sin\alpha\pi,\quad 0<\alpha<1,$$

ou si nous remplaçons 2α par p et $(2\beta-2\alpha)$ par q, nous aurons

$$(2)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}z\cos^{q-1}z\sin(p+q)zdz=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\sin\frac{1}{2}p\pi,\quad 0<p<2,\quad q>0.$$

Les formules (1) et (2) étant ainsi démontrées pour toute valeur positive de q, et pour p compris entre 0 et 1, pour la première; et 0 et 2, pour la seconde, il est facile de démontrer qu'elles sont générales. En effet, celle-ci nous donnera :

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\sin\frac{1}{2}p\pi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}\cos^{q-1}z\sin(p+q+1-1)zdz$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p z\cos^{q-1}z\cos(p+q+1)zdz$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}z\cos^q z\sin(p+q+1)zdz.$$

D'où l'on tire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p z\cos^{q-1}z\cos(p+q+1)zdz$$

$$=-\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\sin\frac{1}{2}p\pi+\frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)}\sin\frac{1}{2}p\pi=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}\cos\frac{1}{2}(p+1)\pi.$$

Ce qui est la formule première démontrée quand p est compris entre 1 et 2. De même à l'aide de celle-ci, on démontrerait la seconde, pour p compris entre 2 et 3 et ainsi de suite. On a donc généralement pour p et q positifs

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}z\cos^{q-1}z\cos(p+q)zdz=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\cos\frac{1}{2}p\pi.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}z\cos^{q-1}z\sin(p+q)zdz=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\sin\frac{1}{2}p\pi.$$

La formule de Gauss fournit encore quelques autres intégrales. Dans la formule dont nous sommes partis, posons

$$\varphi(x)=\varphi(\sin^2 z)=\cos\gamma z,\quad \alpha=\frac{1}{2}.$$

Comme

$$\cos \gamma z = 1 - \frac{\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\gamma}{2}}{\frac{1}{2}\cdot 1}\sin^2 z + \frac{\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}+1\right)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}\frac{\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)}{1.2}\sin^4 z + \cdots\cdots \text{etc.}$$

D'où en substituant, nous aurons

$$\frac{2\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos z)^{2\beta-2}\cos \gamma z dz$$

$$= 1 - \frac{\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\gamma}{2}}{\beta\,.\,1} + \frac{\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}+1\right)\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)}{\beta(\beta+1)\,1.2}\cdots\cdots$$

Or, la somme de la série du second membre pouvant être exprimée d'après la série de Gauss, par

$$\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\beta-\frac{\gamma}{2}\right)}, \quad \beta > \frac{\gamma}{2},$$

on aura en remplaçant β par $\frac{p}{2}+1$, et γ par q,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos z)^p \cos qz dz = \frac{\pi\Gamma(p+1)}{2^{p+1}\Gamma\left(1+\frac{p+q}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{p-q}{2}\right)}.$$

On trouverait de la même manière les deux intégrales

$$\int_0^{\pi}(\sin z)^p \cos qz dz, \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi}(\sin z)^p \sin qz dz,$$

mais on les déduit très facilement des suivantes

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin z)^p \cos (qz)dz = \frac{\pi\Gamma(p+1)}{2^p\Gamma\left(1+\frac{p+q}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{p-q}{2}\right)},$$

et

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\sin z)^p \sin qz dz = 0.$$

On trouve

$$\int_0^{\pi} (\sin z)^p \cos (qz)dz = \frac{\pi \cos\frac{q\pi}{2}\Gamma(p+1)}{2^p\Gamma\left(1+\frac{p+q}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{p-q}{2}\right)},$$

$$\int_0^{\pi} (\sin z)^p \sin (qz)dz = \frac{\pi \sin\frac{q\pi}{2}\Gamma(p+1)}{2^p\Gamma\left(1+\frac{p+q}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{p-q}{2}\right)}.$$

Nous nous bornerons à ces applications qui suffisent pour faire voir tout le parti qu'on peut tirer des propriétés connues de la fonction Γ dans la théorie des suites, et leur application à la recherche des intégrales définies. Nous ferons seulement remarquer que, bien que les applications les plus remarquables, se trouvent en employant la fonction Γ pour des séries infinies, en peut néanmoins, en l'appliquant de la même manière à des séries finies, arriver quelquefois à des relations assez intéressantes. Nous en donnerons quelques exemples simples.

46. Soit la suite finie

$$A_0x^n + A_1x^{n-1}(1-x) + A_2x^{n-2}(1-x)^2 + \cdots\cdots + A_n(1-x)^n = \varphi(x),$$

multiplions les deux membres par $x^{\alpha-n-1}(1-x)^{\beta-1}$, α étant supposé $> n$, et β positif, nous aurons en intégrant depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$

$$A_0\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}+A_1\frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta)}+A_2\frac{\Gamma(\alpha-2)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\cdots\cdots$$

$$+A_n\frac{\Gamma(\alpha-n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta)}=\int_0^1 x^{\alpha-n-1}(1-x)^{\beta-1}\varphi(x)dx.$$

D'où l'on déduit facilement

$$A_0+\frac{A_1\beta}{\alpha-1}+A_2\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)}+A_3\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}\cdots\cdots$$

$$+A_n\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots\cdots(\beta+n-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots\cdots(\alpha-n)}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x^{\alpha-n-1}(1-x)^{\beta-1}\varphi(x)dx.$$

Exemples. 1° Supposons

$$A_0=1,\quad A_1=-1,\quad A_2=+1\cdots\cdots A_n=(-1)^n,$$

nous aurons

$$\varphi(x)=x^{n+1}+(-1)^n(1-x)^{n+1}.$$

L'on aura par conséquent

$$1-\frac{\beta}{\alpha-1}+\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)}-\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}\cdots\cdots+(-1)^n\frac{\beta(\beta+1)\cdots\cdots(\beta+n-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots\cdots(\alpha-n)}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\beta}\left\{\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx+(-1)^n\int_0^1 x^{\alpha-n-1}(1-x)^{\beta+n}dx\right.$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha-n)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+1)}.$$

D'où enfin

$$1-\frac{\beta}{\alpha-1}+\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\cdots\cdots+(-1)^n\frac{\beta(\beta+1)\cdots\cdots(\beta+n-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots\cdots(\alpha-n)}$$

$$=\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}+(-1)^n\frac{\beta(\beta+1)\cdots\cdots(\beta+n)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots\cdots(\alpha-n)(\alpha+\beta)}.$$

2° Posons

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{n}{1}, \quad A_2 = \frac{n(n-1)}{1.2}, \quad \text{etc.},$$

nous aurons

$$\varphi(x) = 1,$$

et par suite

$$1 + \frac{n}{1}\frac{\beta}{(\alpha-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)} \cdots\cdots + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots\cdots(\beta+n-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots\cdots(\alpha-n)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha-n)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta-n)} = \frac{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)\cdots\cdots(\alpha+\beta-n)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots\cdots(\alpha-n)}.$$

3° $\quad A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{n}{2}, \quad A_2 = \frac{n(n-1)}{2^2 1.2} \cdots\cdots$

Il viendra

$$\varphi(x) = \left(\frac{1+x}{2}\right)^n.$$

Et par conséquent

$$1 + \frac{n\beta}{2(\alpha-1)} + \frac{n(n-1)}{2^2 1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2^3 1.2.3}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{1}{2^n}\int_0^1 x^{\alpha-n-1}(1-x)^{\beta-1}(1+x)^n\,dx.$$

Si nous posons $\beta = n+1$, nous aurons

$$1 + \frac{n(n+1)}{2(\alpha-1)} + \frac{(n+2)(n+1)\,n\,(n-1)}{2^2 1.2\,(\alpha-1)(\alpha-2)} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1)}\frac{1}{2^n}\int_0^1 x^{\alpha-n-1}(1-x^2)^n\,dx.$$

Or, l'intégrale

$$\int_0^1 x^{\alpha-n-1}(1-x^2)^n\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+n}{2}+1\right)}\cdot \qquad \text{(Voir N° 37.)}$$

Et par suite

$$1+\frac{n(n+1)}{2(\alpha-1)}+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2^2\,1.2\,(\alpha-1)(\alpha-2)}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\,\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{\alpha+n}{2}+1\right)}=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots\ldots(\alpha+n)}{(\alpha-n)(\alpha-n+2)\ldots\ldots(\alpha+n)}.$$

On trouverait d'autres formules en partant primitivement d'autres suites finies.

47. Nous terminerons par une formule qui se déduit très simplement de la première propriété de la fonction Γ envisagée de la manière la plus générale, c'est-à-dire, telle qu'elle a été définie dans le N° 18, tant pour des valeurs positives de a que pour des valeurs négatives.

On a identiquement quelles que soient les valeurs positives ou négatives de α et de β

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta+1)}+2\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}+\frac{\Gamma(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-1)},$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta-2)}{\Gamma(\alpha-2)\Gamma(\beta+1)}+3\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta-2)}{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta)}$$

$$+3\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta-2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-1)}+\frac{\Gamma(\alpha+\beta-2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-2)}.$$

Continuant de la même manière, on aura n étant un nombre entier

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}=\Gamma(\alpha+\beta-n+1)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\beta+1)}+\frac{n}{1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-n+2)\Gamma(\beta)}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{\Gamma(\alpha-n+3)\Gamma(\beta-1)}+\ldots\ldots\right\}$$

Les coefficients dans l'intérieur de la parenthèse, étant ceux du binôme de Newton. On en tire très facilement

$$(1)\quad 1+\frac{n}{1}\frac{\beta}{(\alpha-n+1)}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\beta(\beta-1)}{(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)}+\cdots \text{ etc.}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta-n+1)}=\frac{(\alpha+\beta-n+1)(\alpha+\beta-n+2)\ldots(\alpha+\beta)}{(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)\ldots.\alpha}$$

Changeons β en $-\beta$ dans cette formule, nous aurons

$$(2)\quad 1-\frac{n}{1}\frac{\beta}{(\alpha-n+1)}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)}\text{ etc.}\ldots\ldots$$

$$=\frac{(\alpha-\beta-n+1)(\alpha-\beta-n+2)\ldots..(\alpha-\beta)}{(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)\ldots..\alpha}.$$

En changeant le signe de α dans la formule (1), nous obtenons celle-ci

$$(3)\quad 1-\frac{n}{1}\frac{\beta}{(\alpha+n-1)}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\beta(\beta-1)}{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)}\ldots..$$

$$=\frac{(\alpha+n-\beta-1)(\alpha+n-\beta-2)\ldots..(\alpha-\beta)}{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots..\alpha}.$$

Si l'on change à la fois le signe de α et de β, l'on obtient

$$1+\frac{n\beta}{1(\alpha+n-1)}+\frac{n(n-1)\beta(\beta+1)}{1.2(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)}+\ldots..$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+n-1)(\alpha+\beta+n-2)\ldots..(\alpha+\beta)}{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots..\alpha}.$$

qui se change, si nous remplaçons $\alpha + n$ par α, en celle-ci

$$(4)\quad 1 + \frac{n\beta}{1(\alpha-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\cdots\cdots$$

$$= \frac{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)\cdots\cdots(\alpha+\beta-n)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots\cdots(\alpha-n)},$$

formule déjà obtenue précédemment.

Si dans les suites (3) et (4), nous remplaçons β par n, on aura

$$1 - \frac{n^2}{1(\alpha-1)} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2(\alpha-1)(\alpha-2)}\cdots\cdots = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots\cdots(\alpha-n)}{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\cdots\cdots\alpha},$$

$$1 + \frac{n^2}{1(\alpha-1)} + \frac{n^2(n^2-1)}{1.2(\alpha-1)(\alpha-2)} + \cdots\cdots = \frac{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\cdots\cdots\alpha}{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots\cdots(\alpha-n)}.$$

Ces deux dernières multipliées membre à membre donnent

$$\left\{1 - \frac{n^2}{1(\alpha+n-1)} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)}\cdots\cdots\right\}$$

$$\times\left\{1 + \frac{n^2}{1(\alpha-1)} + \frac{n^2(n^2-1)}{1(\alpha-1)(\alpha-2)}\cdots\cdots\right\} = 1.$$

Dans la formule (3), remplacez n par $\frac{n}{2}$ et b par $\frac{n-1}{2}$, si n est pair, ou bien n par $\frac{n-1}{2}$, α par $\alpha + \frac{1}{2}$, et b par $\frac{n}{2}$, si n est impair, vous obtiendrez dans les deux cas

$$1 - \frac{n(n-1)}{2^2\left(\frac{\alpha+n}{2}-1\right)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^4 1.2\left(\frac{\alpha+n}{2}-1\right)\left(\frac{\alpha+n}{2}-2\right)}\cdots\cdots$$

$$= \frac{(\alpha-n)(\alpha-n+2)\cdots\cdots(\alpha+n)}{\alpha(\alpha+1)\cdots\cdots(\alpha+n)}.$$

où nous supposerons α positif. En la multipliant membre à membre avec la dernière formule du numéro précédent, on obtiendra la relation intéressante

$$\left\{1+\frac{n(n-1)}{2(\alpha-1)}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4(\alpha-1)(\alpha-2)}+\cdots\cdots\right\}\times$$

$$\left\{1-\frac{n(n-1)}{2^2\left(\frac{\alpha+n}{2}-1\right)}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^4 1.2\left(\frac{\alpha+n}{2}-1\right)\left(\frac{\alpha+n}{2}-2\right)}\cdots\text{etc.}\right\}=1.$$

NOTE PREMIÈRE.

—

Sur quelques formules dont il est fait usage dans le chapitre Ier.

On doit à Jean Bernoulli, la formule suivante

$$\sin x = x\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\cdots\cdots$$

On en déduit facilement

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{1-a} + \frac{1}{a+2} - \frac{1}{2-a}\cdots\cdots$$

$$\frac{\pi}{\operatorname{tg} a\pi} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a-2}\cdots\cdots$$

On en conclura la valeur des deux intégrales définies

$$\int_0^1 \frac{y^{a-1}+y^{-a}}{1+y}\,dy = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \qquad a<1.$$

$$\int_0^1 \frac{y^{a-1}-y^{-a}}{1-y}\,dy = \frac{\pi}{\operatorname{tg} a\pi}, \qquad a<1.$$

en s'appuyant sur les développements

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \cdots\cdots \quad y < 1,$$

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots\cdots \quad y < 1.$$

La première de ces deux intégrales se transforme facilement en une autre. En effet

$$\int_0^1 \frac{y^{a-1} + y^{-a}}{1+y} dy = \int_0^1 \frac{y^{a-1}}{1+y} dy + \int_0^1 \frac{y^{-a}}{1+y} dy.$$

Si dans

$$\int_0^1 \frac{y^{-a}}{1+y} dy,$$

on remplace y par $\frac{1}{y}$, elle deviendra

$$\int_1^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y} dy.$$

On aura donc

$$\int_0^1 \frac{y^{a-1} + y^{-a}}{1+y} dy = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y} dy = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

formule dont nous nous sommes servis.

Quant à la seconde de ces formules, on en déduit une relation très remarquable.

Supposons $a < \frac{1}{n}$, n étant un nombre entier, et remarquant que

$$\frac{\pi}{\operatorname{tg} a\pi} = \frac{d \log \sin a\pi}{da},$$

on aura en remplaçant successivement a par

$$a,\quad a+\frac{1}{n},\quad a+\frac{2}{n},\quad a+\frac{3}{n},\ldots\ldots a+\frac{n-1}{n},$$

et ajoutant entre elles toutes les équations résultantes

$$\frac{d\log\left[\sin a\pi\sin\left(a+\frac{1}{n}\right)\pi\sin\left(a+\frac{2}{n}\right)\pi\ldots\ldots\sin\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\pi\right]}{da}$$

$$=\int_0^1\frac{\left\{y^{a-1}-y^{-a-\frac{n-1}{n}}\right\}}{1-y}\left\{1+y^{\frac{1}{n}}+y^{\frac{2}{n}}+\ldots\ldots+y^{\frac{n-1}{n}}\right\}dy=\int_0^1\frac{y^{a-1}-y^{-a-\frac{n-1}{n}}}{1-y^{\frac{1}{n}}}\,dy,$$

ou en faisant $y=z^n$

$$=n\int_0^1\frac{z^{na-1}-z^{-na}}{1-z}\,dz=n\,\frac{d\log\sin na\pi}{dna}=\frac{d\log\sin na\pi}{da}.$$

On aura donc

$$\frac{d\log\left[\sin a\pi\sin\left(a+\frac{1}{n}\right)\pi\sin\left(a+\frac{2}{n}\right)\pi\ldots\ldots\sin\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\pi\right]}{da}$$

$$=\frac{d\log\sin na\pi}{da};$$

d'où

$$\frac{\sin a\pi\sin\left(a+\frac{1}{n}\right)\pi\sin\left(a+\frac{2}{n}\right)\pi\ldots\ldots\sin\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\pi}{\sin na\pi}=\mathrm{C}\ldots\ldots(1)$$

C étant indépendant de a. Cette formule n'est ici démontrée que

pour $a < \frac{1}{n}$, mais on voit immédiatement qu'elle est générale, puisque le premier membre ne change pas, si on y remplace a par $a + \frac{1}{n}$.

La valeur de C se détermine facilement. Remplacez dans (1), a par $a + \frac{1}{2n}$, et multipliez l'équation résultante membre à membre avec l'équation (1), on aura après quelques transformations fondées sur la formule

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x,$$

$$\frac{\sin 2a\pi \sin\left(2a + \frac{1}{n}\right)\pi \ldots\ldots \sin\left(2a + \frac{n-1}{n}\right)\pi}{\sin 2an\pi} = C^2 \times 2^{n-1}.$$

Et comme le premier membre est égal à C, on aura

$$C = C^2 \times 2^{n-1}.$$

Et puisque C n'est ni nul ni infini

$$C = 2^{1-n}.$$

On a donc la formule d'Euler

$$\sin a\pi \sin\left(a + \frac{1}{n}\right)\pi \ldots\ldots \sin\left(a + \frac{n-1}{n}\right)\pi = 2^{1-n} \sin na\pi.\ (*)$$

Si après avoir divisé les deux membres par $\sin na\pi$, nous faisons converger a vers zéro, le second membre reste constant, le premier converge vers

$$\frac{1}{n} \sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \ldots\ldots \sin\frac{n-1}{n}\pi,$$

(*) Cette démonstration indirecte, mais fort simple, est je crois nouvelle.

puisque

$$\frac{\sin a\pi}{\sin na\pi}$$

converge vers $\frac{1}{n}$.

On aura donc à la limite

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

NOTE DEUXIÈME.

De la valeur de m qui donne à l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}dx$, *sa valeur minimum.*

Si nous considérons l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}dx,$$

comme une fonction continue de m, on peut se proposer de rechercher des limites entre lesquelles soit comprise la valeur de m qui rend cette intégrale un minimum. Il résulte déjà de ce que nous

avons vu en traitant de la formule de Stirling, que cette valeur de m est comprise entre

$$\pi a - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \pi a + 1 + \frac{\pi a}{2^{2\pi a} - 1}, \quad a > 1,$$

mais on peut déterminer des limites plus rapprochées entre lesquelles se trouve comprise cette valeur de m.

Dérivons d'abord cette intégrale par rapport à m. En supprimant le facteur 2, cette dérivée sera

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1+x^2}\log x \log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}} = \int_1^\infty \frac{\log x dx}{1+x^2}\left(x^{2m}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}} - \frac{1}{x^{2m}}\log\frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi a}{x}}}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r}\int_1^\infty \frac{\log x dx}{1+x^2}\left(x^{2m}e^{-2r\pi a x} - \frac{1}{x^{2m}}e^{-\frac{2r\pi a}{x}}\right)$$

Or, pour toutes les valeurs positives de x plus grandes que l'unité, et pour $m \leqq r\pi a$, on a

$$x - \frac{1}{x} > \frac{2m}{r\pi a}\log x,$$

et par conséquent

$$\frac{1}{x^{2m}}e^{-\frac{2r\pi a}{x}} > x^{2m}e^{-2r\pi a x}.$$

D'où l'on peut conclure que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1+x^2}\log x \log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}},$$

est une quantité essentiellement négative tant que m n'est pas supérieur à πa. La dérivée devant s'évanouir pour le minimum, il en résulte que $m > \pi a$. D'un autre côté, en désignant par m' la valeur de m, qui rend minimum l'expression

$$\frac{\Gamma(2m-1)A_{2m}}{a^{2m-1}},$$

considérée comme une fonction continue de m, en différentiant par rapport à m, l'équation trouvée (N° 23)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}dx+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}dx=\frac{\Gamma(2m-1)}{a^{2m-1}}A_{2m},$$

on aura pour cette valeur m'

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m'-2}}{1+x^2}\log x\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}dx+\int_0^\infty \frac{x^{2m'}}{1+x^2}\log x\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}dx=0.$$

Les deux intégrales du premier membre étant égales et de signe contraire, on en conclut que la valeur de m cherchée, est comprise entre $m'-1$ et m'. Il ne reste plus qu'à rechercher cette valeur de m' qui rend

$$\frac{\Gamma(2m-1)A_{2m}}{a^{2m-1}} \quad \text{ou} \quad \log\frac{\Gamma(2m-1)A_{2m}}{a^{2m-1}}$$

un minimum. On aura en égalant à zéro la dérivée de

$$\log\frac{\Gamma(2m-1)A_{2m}}{a^{2m-1}},$$

et se souvenant de la valeur de A_{2m},

$$\frac{d\log\Gamma(2m'-1)}{d(2m')}=\log 2\pi a+\frac{\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{\log r}{r^{2m'}}}{\sum\frac{1}{r^{2m'}}}. \qquad (1)\ (*)$$

(*) Toute la première partie de cette note est extraite presque textuellement du mémoire de Mr Schaar déjà cité.

Or, la formule de Stirling, sous sa forme exacte, c'est-à-dire, accompagnée de son terme sommatoire donne pour $m = 1$,

$$\log \Gamma(1+a) = \frac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \frac{B_1}{1.2a} - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}dx$$

et d'après une formule connue

$$\log \Gamma(1+a) = \frac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}.$$

Si après avoir remplacé dans chacune de ces deux formules $\log \Gamma(1+a)$ par $\log a + \log \Gamma(a)$, on les dérive par rapport à a puis qu'on fasse $a = 2m' - 1$, les formules résultantes combinées avec l'équation (1) donneront en se rappelant que $B_1 = \frac{1}{6}$,

$$(2) \quad \log(2m'-1) = \log 2\pi a + \frac{1}{2(2m'-1)} + 2\int_0^\infty \frac{x dx}{1+x^2}\frac{1}{e^{2x(2m'-1)}-1} + \frac{\Sigma \frac{\log r}{r^{2m'}}}{\Sigma \frac{1}{r^{2m'}}},$$

$$(3) \quad \log(2m'-1) = \log 2\pi a + \frac{1}{2(2m'-1)} + \frac{1}{12(2m'-1)^2} - 2\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{1+x^2}\frac{1}{e^{2\pi(2m'-1)}-1} + \frac{\Sigma \frac{\log r}{r^{2m'}}}{\Sigma \frac{1}{r^{2m'}}}.$$

C'est de ces deux expressions que nous partirons pour fixer les limites de m'.

1° m' est compris entre $\pi a + \frac{1}{2}$ et $\pi a + 1$.

La formule (2) nous donne immédiatement

$$\log\frac{2m'-1}{2\pi a} > \frac{1}{2(2m'-1)} > \log\left(1 + \frac{1}{2(2m'-1)}\right).$$

D'où

$$\frac{2m'-1}{2\pi a} > 1 + \frac{1}{2(2m'-1)}.$$

On en tire d'abord

$$\frac{2m'-1}{2\pi a} > 1,$$

et par conséquent $m' > \pi a + \frac{1}{2}$.

La formule (3) nous donnera

$$\log\frac{2m'-1}{2\pi a} < \frac{1}{2(2m'-1)} + \frac{1}{12(2m'-1)^2} + \Sigma\frac{\log r}{r^{2m'}}.$$

On a

$$\Sigma\frac{\log r}{r^{2m'}} = \frac{\log 2}{2^{2m'}} + \frac{\log 3}{3^{2m'}} + \frac{\log 4}{4^{2m'}} + \cdots\cdots$$

mais puisque $m' > \pi a + \frac{1}{2} > 3$,

$$\frac{\log 2}{2^{2m'}} > \frac{\log 3}{3^{2m'}} > \frac{\log 4}{4^{2m'}} > \frac{\log 5}{5^{2m'}} \cdots\cdots \text{ etc.},$$

on aura

$$\frac{\log 2}{2^{2m'}} + \frac{\log 3}{3^{2m'}} < \frac{2\log 2}{2^{2m'}}, \quad \frac{\log 4}{4^{2m'}} + \frac{\log 5}{5^{2m'}} + \frac{\log 6}{6^{2m'}} + \frac{\log 7}{7^{2m'}} < \frac{4\log 4}{4^{2m'}}.$$

Donc

$$\Sigma\frac{\log r}{r^{2m'}} < \frac{\log 2}{2^{2m'-1}} + \frac{2\log 2}{4^{2m'-1}} + \frac{3\log 2}{8^{2m'-1}} + \frac{4\log 2}{16^{2m'-1}}.$$

Or

$$\frac{3\log 2}{8^{2m'-1}} < \frac{\log 2}{2.8^{2m'-2}}, \quad \frac{4\log 2}{16^{2m'-1}} < \frac{\log 2}{2.16^{2m'-2}}\cdots\cdots$$

Il viendra donc

$$\Sigma \frac{\log r}{r^{2m'}} < \frac{1}{2} \log 2 \left(\frac{1}{2^{2m'-2}} + \frac{1}{4^{2m'-2}} + \frac{1}{8^{2m'-2}} + \cdots\cdots \right).$$

Donc

$$\Sigma \frac{\log r}{r^{2m'}} < \frac{1}{2} \log 2 \, \frac{1}{2^{2m'-2} - 1} \quad \text{ou} \quad \Sigma \frac{\log r}{r^{2m'}} < \frac{\log 2}{2^{2m'-1} - 2}.$$

On en conclut

$$\log \frac{2m' - 1}{2\pi a} < \frac{1}{2(2m' - 1)} + \frac{1}{12(2m' - 1)^2} + \frac{\log 2}{2^{2m'-1} - 2}.$$

Si l'on remarque que $m' > \pi a + \frac{1}{2}$, on aura

$$\log \frac{2m' - 1}{2\pi a} < \frac{1}{4\pi a} + \frac{1}{48\pi^2 a^2} + \frac{\log 2}{2^{2\pi a} - 2}.$$

Si je pose

$$\frac{2m' - 1}{2\pi a} = \frac{1}{1 - x},$$

comme

$$\log \frac{1}{1 - x} > x,$$

j'aurai

$$x < \frac{1}{4\pi a} + \frac{1}{48\pi^2 a^2} + \frac{\log 2}{2^{2\pi a} - 2}.$$

Multipliant de part et d'autre par $2\pi a + 1$, il viendra

$$x(2\pi a + 1) < \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi a} + \frac{2\pi a + 1}{48\pi^2 a^2} + \frac{\log 2\,(2\pi a + 1)}{2^{2\pi a} - 2}.$$

Or, a étant au moins égal à l'unité, il est facile de voir que le second membre qui décroît avec $\frac{1}{a}$ est constamment inférieur à l'unité, puisqu'il l'est si $a = 1$. On aura donc constamment

$$x < \frac{1}{2\pi a + 1},$$

et on en tire immédiatement en remplaçant dans

$$\frac{2m' - 1}{2\pi a} = \frac{1}{1 - x}, \quad m' < \pi a + 1.$$

2° Ces limites étant obtenues pour la valeur de m', nous allons en trouver de plus resserrées. Si dans la formule trouvée

$$\frac{2m' - 1}{2\pi a} > 1 + \frac{1}{2(2m' - 1)}.$$

Nous remplaçons dans le second membre m' par $\pi a + 1$, nous aurons

$$\frac{2m' - 1}{2\pi a} > 1 + \frac{1}{2(2\pi a + 1)}.$$

D'où

$$m' > \pi a + \frac{1}{2} + \frac{\pi a}{4\pi a + 2}.$$

Il est facile de voir que cette limite inférieure converge rapidement vers $\pi a + \frac{3}{4}$, quand a augmente.

Revenons à la limite supérieure de m', nous avons

$$\mathrm{l\,g}\,\frac{2m' - 1}{2\pi a} < \frac{1}{2(2m' - 1)} + \frac{1}{12(2m' - 1)^2} + \frac{\log 2}{2^{2m'-1} - 2}.$$

Et à cause de

$$m' > \pi a + \frac{1}{2} + \frac{\pi a}{4\pi a + 2},$$

nous aurons en représentant encore $\frac{2m' - 1}{2\pi a}$ par x

$$x < \frac{1}{4\pi a + \frac{4\pi a}{4\pi a + 2}} + \frac{1}{48\pi^2 a^2} + \frac{\log 2}{2^{2\pi a + \frac{\pi a}{2\pi a + 1}} - 2}.$$

D'où

$$x < \frac{1}{4\pi a} - \frac{1}{16\pi^2 a^2 + 8\pi a} + \frac{1}{4\pi a(4\pi a + 2)^2} + \frac{1}{48\pi^2 a^2} + \frac{\log 2}{2^{2\pi a + \frac{\pi a}{2\pi a + 1}} - 2}.$$

Remarquons que si $a > 1$, on a constamment

$$\frac{1}{16\pi^2 a^2 + 8\pi a} > \frac{1}{4\pi a(4\pi a + 2)^2} + \frac{1}{48\pi^2 a^2},$$

donc

$$x < \frac{1}{4\pi a} + \frac{\log 2}{2^{2\pi a + \frac{\pi a}{2\pi a + 1}} - 2}.$$

D'où multipliant des deux parts, par $4\pi a - 1$, nous aurons

$$x(4\pi a - 1) < 1 - \frac{1}{4\pi a} + \frac{(4\pi a - 1)\log 2}{2^{2\pi a + \frac{\pi a}{2\pi a + 1}} - 2}.$$

Remarquant maintenant que dans le second membre les deux derniers termes décroissent séparément avec $\frac{1}{a}$, mais le second plus rapidement que le premier, il en résultera que le second membre est constamment inférieur à l'unité, s'il l'est pour $a = 1$, or, en

faisant le calcul, on trouve que cela est vérifié, on aura donc constamment

$$x(4\pi a - 1) < 1,$$

et par suite

$$x < \frac{1}{4\pi a - 1},$$

D'où

$$\frac{2m' - 1}{2\pi a} < \frac{4\pi a - 1}{4\pi a - 2},$$

et

$$m' < \pi a + \frac{1}{2} + \frac{\pi a}{4\pi a - 2}.$$

Cette limite supérieure converge rapidement vers $\pi a + \frac{3}{4}$ à mesure que a augmente. Les limites de m' sont donc très peu distantes entre elles.

Comme nous avons vu que la valeur de m qui rend un minimum l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1 + x^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi a x}} dx,$$

ne peut être inférieure à πa, et de plus qu'elle doit être inférieure à m', on aura

$$\pi a < m < \pi a + \frac{1}{2} + \frac{\pi a}{4\pi a - 2}.$$

THÈSES.

I. La méthode infinitésimale repose entièrement sur l'induction suivante : *Les règles de calcul vraies pour les quantités finies, le sont également pour les quantités infiniment petites*. Ce principe est inadmissible.

II. Le caractère propre des sciences mathématiques, c'est de procéder par voie de déduction, en partant de principes admis par tous comme incontestables. Le principe même de la méthode infinitésimale étant contesté, cette raison seule suffirait pour la faire rejeter comme mode d'exposition du calcul différentiel et du calcul intégral.

III. La méthode infinitésimale détruit entièrement l'idée de continuité.

IV. Fausse dans son principe, la méthode infinitésimale peut conduire dans ses applications, à des résultats absurdes et contradictoires.

V. Fonder les mathématiques sur des principes méthaphysiques, c'est leur enlever la certitude qui leur est propre.

VI. Les quantités négatives n'ont qu'une existence de convention.

VII. Quoique la nature des quantités incommensurables soit entièrement inconnue, il suffit de les coucevoir comme comprises entre deux quantités commensurables dont la différence peut devenir aussi petite que l'on veut, pour que la légitimité de leur emploi soit incontestable.

VIII. Le passage du réel à l'imaginaire est un des moyens les plus féconds dans les recherches analytiques, mais il ne doit être employé qu'avec une extrême réserve comme moyen de démonstration.

IX. Il existe des séries convergentes qui ne peuvent pas être différentiées, bien que tous les termes et la somme de la série soient des fonctions continues de la variable.

X. Il est des cas où la dérivation sous le signe d'une intégrale définie n'est pas permise, bien que l'intégrale définie et la différentielle soient des fonctions continues.

XI. On donne ordinairement comme règle : pour qu'une intégrale définie dont la limite supérieure est infinie, soit finie et déterminée, il est nécessaire que le coefficient différentiel converge vers zéro, en même temps que la variable converge vers l'infini. Cette condition n'est pas toujours nécessaire.

XII. Quelque petit que soit ε, la courbe dont l'équation serait

$$y = e^{-\varepsilon x} x^{n-1} \cos bx, \quad n > 1,$$

diffère essentiellement de celle dont l'équation est

$$y = x^{n-1} \cos bx,$$

on en conclut qu'il est impossible de tirer l'intégrale

$$\int_0^\infty x^{n-1} \cos bx dx, \quad n > 1;$$

de la supposition $\varepsilon = 0$ dans la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon x} x^{n-1} \cos bx dx.$$

XIII. Lorsqu'une intégrale se compose de plusieurs parties qui sont séparément infinies, il n'est pas permis d'employer pour la transformation de ces intégrales partielles des substitutions différentes, sans avoir égard aux relations qui existent entre les nouvelles variables.

XIV. Pour que l'énoncé du théorème de Mr Cauchy sur la formule de Maclaurin soit exact, il faut y joindre une condition de périodicité de la fonction qui restreint de beaucoup la portée du théorème.

XV. La théorie de l'équilibre des corps ne doit pas être subordonnée à celle de leur mouvement.

XVI. Dans l'enseignement de la mécanique, la méthode analytique doit être préférée à la méthode géométrique.

XVII. L'équation fondamentale de la dynamique peut et devrait être démontrée directement par la dérivation sans considérations infinitésimales.

XVIII. La distinction des forces en forces continues et forces instantanées n'est pas fondée.

XIX. Il n'y a point de force d'inertie.

XX. Contrairement à l'assertion de Poisson, les formules qui donnent la vitesse de rotation produite par plusieurs masses choquantes s'attachant à un corps tournant autour d'un axe fixe, diffèrent essentiellement suivant que les percussions sont simultanées ou successives.

XXI. Les équations du mouvement de la chaleur sont applicables au mouvement de l'électricité.

XXII. Le phénomène de la dispersion ne peut pas être considéré comme une objection à la théorie des ondulations.

XXIII. Les fluides impondérables ne sont que les manifestations diverses d'un seul et même agent ou fluide universel.





